Devoir

Définition : série de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est appelée série de Bertrand.

Partie I :
Soit $\alpha > 1$.

1) Montrer que : $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = O\left(\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right)$
2) En déduire (théorème du cours) la convergence de la série de Bertrand.

Partie II :
Soit $\alpha < 1$.

3) Justifie qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n}$
4) En déduire la divergence de la série de Bertrand.

Partie III :
Soit $\alpha = 1$.

- **Soit $\beta = 1$:** **Les questions Q5, Q6, Q7 ont été traitées dans la feuille d'exercice Série (exercice 3)**

  Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ pour $n \geq 2$.

5) Encadrer S_n.
6) En déduire que : $S_n \sim \ln(\ln(n))$.
7) En déduire la nature de la série.

- **Soit $\beta < 1$**

8) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, \frac{1}{n\ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n\ln(n)}$
9) En déduire la nature de la série (en utilisant **Q7**).

- **Soit $\beta > 1$** (généralisation du cas $(\alpha, \beta) = (1,1)$)

10) Justifier que la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)} \quad \text{et l'intégrale} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{sont de même nature.}$$

11) A l'aide d'un changement de variable idoine, en déduire la convergence de la série.

Conclusion

Théorème : série de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est convergente si et seulement si $((\boldsymbol{\alpha > 1})$ ou $(\boldsymbol{\alpha > 1}$ et $\boldsymbol{\beta > 1})$.

Remarque :
La série de Bertrand une série de référence qui est « plus fine » celle de Riemann (celle de Riemann est un cas particulier).

Histoire :
Bertrand est aussi connu pour son postulat, démontré par Tchebychev, qui dit **qu'il existe toujours au moins un nombre premier strictement compris entre $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{2n}$**, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 (« c'est beau les maths »).