DM
Série de Bertrand – Corrigé

1. On forme le quotient :

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}}{\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}} = \frac{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln(n)^\beta}.$$

Or $\frac{1-\alpha}{2} < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln(n)^\beta} = 0$ par croissance comparée, et donc

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = O(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}).$$

2. On a $\alpha > 1$ et donc $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ converge. D'après la comparaison **Q1**, la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge aussi lorsque $\alpha > 1$.

Remarque : Le choix de la puissance $\frac{1+\alpha}{2}$ est souple, on aurait pu prendre n'importe quel réel dans l'intervalle $]1, \alpha[$, et on a pris le milieu.

3. L'énoncé suggère une propriété « à partir d'un certain rang », il est donc naturel de calculer une limite. Comme ci-dessus, on forme le quotient :

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(n)^\beta}.$$

Comme $\alpha < 1$, on a $1-\alpha > 0$, et par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(n)^\beta} = +\infty,$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0 : \quad \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \geqslant 1 \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}.$$

4. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc d'après la question précédente, par minoration, la série de Betrand $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge aussi lorsque $\alpha < 1$.

5. On reprend la méthode du cours. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$ (étude rapide de dérivée). Ainsi, on a

$$\forall k \geqslant 3 : \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On somme de $k = 3$ à n :

$$\int_3^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_2^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ajoute le premier terme :

$$\frac{1}{2\ln 2} + \int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \int_2^{n} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

6. On reconnait que $\frac{1}{t\ln t} = \frac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = \ln t$. Ainsi, on a

$$\int^x \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln(|\ln x)|)$$

On déduit de la question précédente :

$$\forall n \geqslant 3 : \quad \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 3)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n)) - \ln(-\ln 2).$$

Déjà, cela montre que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, et donc la série diverge. De plus, on divise cela par $\ln(\ln(n))$, on montre que $\ln(\ln(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ (mettre n en facteur dans $\ln(\ln(n+1))$, et on déduit par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$, ce qui donne l'équivalent demandé.

7. L'équivalent nous dit que la somme partielle (S_n) tend vers $+\infty$ donc la série diverge lorsque $\alpha = \beta = 1$, (ce qu'on pouvait déjà voir dans l'encadrement trouvé en **Q5**).

Remarque : Une divergence en $\ln(\ln(n))$ est très lente : si vous aviez pris la calculette pour calculer quelques sommes partielles, vous en auriez peut-être déduit à tort que la série converge.

8. Une question facile : notons que

$$n \geqslant 3 \implies \ln(n) > 1 \implies \ln(n)^\beta \leqslant \ln(n) \quad \text{pour} \quad \beta < 1$$

et donc lorsque $\beta < 1$:

$$\forall n \leqslant 3 : \quad \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n\ln n}.$$

9. D'après **Q7**, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\ln n}$ diverge, donc d'après la minoration, de **Q8**, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ diverge aussi lorsque $\beta < 1$.

10. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^\beta}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$, donc en reprenant les encadrements séries-intégrales on trouve que la somme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si la suite d'intégrales $\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $n \to +\infty$.

11. On doit calculer l'intégrale précédente. On pose $u = \ln(t)$ (ou, ce qui revient au même, on repère une fonction de la forme $\frac{u'}{u^\beta}$), et on trouve que

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-\beta+1}(\ln(n)^{-\beta+1} - \ln(2)^{-\beta+1}).$$

Lorsque $\beta > 1$, on a $-\beta+1 < 0$, et cette quantité a une limite lorsque $n \to +\infty$. On déduit que la série converge.