DM “de Toussaint’
Sommes, fonctions, équations

Exercice 1 •∘∘ On prépare le cours, si pas déjà fait au DM précédent

On souhaite étudier la fonction tan : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que cette fonction est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, étudier sa parité, et donner sa dérivée.
2. Montrer qu'elle définit une bijection, notée f, de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur un ensemble à déterminer (on n'essayera pas de “calculer" sa réciproque).
3. Déterminer $f^{-1}(1)$.
4. Calculer une expression pour $(f^{-1})'(x)$ (sans expression pour f^{-1} !). On aura remarqué que $f' = 1+\tan^2$.

Correction : :

Méthode :

1. Le dénominateur ne doit pas s'annuler.
2. Standard : on dresse les variations sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ pour lire l'ensemble d'arriver, et conclure avec le théorème de la bijection.
3. On doit chercher $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = 1$. Ouvrir les yeux...
4. Appliquer la formule du cours.

Détails :

1. On a :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \cos \neq 0,$$
et donc la fonction tan est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, comme quotient de fonctions dont le dénomunateur ne s'annule pas.
Pour aller plus loin On peut en fait définir tan sur :
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$
On peut écrire cet ensemble comme une union (infinie) d'intervalles :
$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[.$$
On verra cela dans le cours.
2. On montre que la fonction est impaire :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$
Calculons sa dérivée, en dérivant simplement la fraction :
$$\tan'(x) = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2.$$
Ainsi, on a $\tan' > 0$, et la fonction est donc strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Pour le calcul des limites, on a
$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+ \end{cases}, \quad \text{et donc} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$$
Puis par parité, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.
Ainsi, la fonction f est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur son image $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$, qui vaut $]-\infty,+\infty[$ d'après le calcul des limites.
3. On doit trouver $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $f(x) = 1$. Or :
$$f(x) = 1 \iff \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \iff \sin x = \cos x.$$
On voit (on peut s'aider du cercle trigo) que $x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$, et donc la solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est $\frac{\pi}{4}$. Ainsi : $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.
4. On applique la formule :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
Or on a vu que $f'(x) = 1+\tan^2 x = 1+f(x)^2$, et puisque $f^{-1}(f(x)) = x$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les fonctions tan et sa réciproque, Arctan, sont étudiées et tracées dans le cours.

Exercice 2 ••∘ Des calculs de sommes (proposés par M. Scotto)

1. Calculer pour $n \geqslant 2$:
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right)$$

2. Donner la décomposition en éléments simples de

$$x \mapsto \frac{5x+6}{x(x+1)(x+2)}$$

En déduire pour $n \geqslant 1$ la valeur de

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5k+6}{k(k+1)(k+2)}$$

Donner également $\lim_{n\to+\infty} T_n$, si elle existe.

3. Calculer pour $n \geqslant 1$:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+2)!}$$

4. Calculer pour $n \geqslant 2$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

Correction :

1. On a

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (2\ln(k) - ln(k-1) - \ln(k+1))$$

On flaire le télescopage, regroupons intelligement les termes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} ((\ln(k) - \ln(k-1)) + (\ln(k) - \ln(k+1))) \\ &= \sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1)) + \sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1)) + \sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \ln(n) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+1) = \ln(\frac{2n}{n+1}) \end{aligned}$$

Notez que certains ont effectués des changements d'indice $p = k-1$ et $p = k+1$, ce qui revient à démontrer le télescopage.

Plus atypique, certains ont tout exprimé à partir de $\ln(n!)$, et ont joué avec les propriétés des factorielles (télescopage de produit), bravo à eux !

2. Après décomposition en éléments simples (voir cours pour la méthode), on trouve :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right)$$

Encore une fois, on sent le télesccopage, mais comment le faire apparaître ? On force les choses avec des techniques de balayeur et on écrit :

$$\frac{3}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} = \frac{3}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2}.$$

Ainsi :

$$T_n = 3\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + 2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 3(1 - \frac{1}{n+1}) + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}).$$

On trouve $\lim_{n\to+\infty} T_n = 4$.

3. Proche du TD, on écrit un bayaleur pour essayer de simplifier la factorielle :

$$\frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!},$$

et un télescopage permet de conclure.

4. En revenant à la définition du coefficient binomial :

$$\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n-k}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n}{k+1}$$

On conclut facilement en utilisant $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$ et un changement d'indice $p = k+1$, ainsi qu'en gérant les termes qui dépassent. Voici les détails :

$$B_n = \sum_{p=2}^{n-1}\binom{n}{p} = \sum_{p=2}^{n-1}\binom{n}{p} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{n} = 2^n - n - 2.$$

Exercice 3 ●●○

Soient E et F deux ensembles, ainsi que $f : E \to F$ une fonction. On a vu dans le cours que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Montrer si f est injective, alors l'inclusion réciproque est vraie.

Méthode :

Commencer par “matérialiser” un élément de $f(A) \cap f(B)$.

Correction :
Méthode :
Commencer par "matérialiser" un élément de $f(A) \cap f(B)$, puis utiliser que si $f(x) = f(x')$, alors ...
Détails :
Supposons que f est injective, et montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, alors

$$\exists x \in A,\ y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in B,\ y = f(x').$$

En particulier, $f(x) = y = f(x')$, et puisque f est injective, on a $x = x'$. Ainsi, $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$, puis $y = f(x) \in f(A \cap B)$.
Cela prouve que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Exercice 4 ●●○ — Une équation proposée par M. Scotto Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z+2)^6 + (z+2)^3 + 1 = 0.$$

Correction :
Méthode :
Changer d'inconnue et savoir lever la tête et utliser le cours.
Détails :
L'inconnue $Z = z + 2$ est solution de l'équation

$$Z^6 + Z^3 + 1 = 0.$$

Ensuite, l'inconnue $X = Z^3$, est solution de l'équation

$$X^2 + X + 1 = 0.$$

Cette équation a deux solutions complexes :

$$X_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Puisqu'on veut trouver les racines cubiques complexes de ces nombres, on cherche une forme exponentielle, qui de toute façon doit vous sauter aux yeux :

$$X_1 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad X_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

On résout alors (c'est du cours, à vous de donner les détails) :

$$Z^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \iff Z = e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

et

$$Z^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \iff Z = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

Finalement, puisque $z = Z + 2$, l'ensemble des soluions est :

$$\mathcal{S} = \{2 + e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2\ \}\} \cup \{2 + e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2\ \}\}$$

Pour être perfectionniste, on peut ajouter que ces deux ensembles de solutions n'aucune valeur en commun. C'est assez direct : les solutions de l'équation en Z sont clairement distinctes, et l'application $Z \mapsto Z + 2$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.