Feuille de révision DS commun

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

- **a)** Donner la forme exponentielle de z.
- **b)** Calculer z^n.
- **c)** Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que z^n soit un nombre réel.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 20 - 48i$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z+2}{z-i}\right)^6 = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$

4) Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4$.
Décomposer P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 :

Linéariser $\cos^3(x)$ et en déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3(x)$

Exercice 3 :

1) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right],\ \frac{5}{4}x \leq \operatorname{Arcsin}(x) \leq \frac{5}{3}x$

2) En déduire un encadrement de $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{7}{10}\right)$

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{x}y = \frac{-2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 5y' + 4y = 2xe^{4x} - e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

Calculer les primitives suivantes :

1) $f : x \longmapsto x^3 \ln x$

2) $g : x \longmapsto \sin(2x)e^{-x}$

3) $h : x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$

4) $i : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x)$

Exercice 6 :

Calculer $\displaystyle\int_{-3/4}^{3/4} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

- **a)** Avec le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$;
- **b)** En intégrant par parties puis avec un changement de variable.

Exercice 7 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : x \longmapsto \frac{1}{1+3x}$

Déterminer la dérivée n–ième de f.

<u>Exercice 8 :</u>

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si tel est le cas, ce prolongement est-il dérivable en 0 ? Le cas échéant, on déterminera une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ ainsi que la position relative de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.
3) La fonction f est-elle continûment dérivable sur $\mathbb{R}$?
4) Déterminer le comportement asymptotique de la fonction f en $+\infty$, ainsi qu'une éventuelle position relative.

<u>Exercice 9 :</u>

1) Calculer pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right)$$

2) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$$

<u>Exercice 10 :</u>

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^3}$$

<u>Exercice 11 :</u> (<u>CAPLP sujet 2023</u>)

Soient (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 \;=\; 2 \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 et converge vers 0.
2) Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

<u>Exercice 12 :</u>

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(1,1,1)\big)$.

1) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

<u>Exercice 13 :</u>

Soient $E = \mathrm{Vect}\big((1,-1,1,2),(1,2,3,-1),(-1,-8,-7,7)\big)$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,4,2)\big)$

1) Déterminer une base de E.
2) Déterminer les équations cartésiennes de E.
3) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 14 :

1) Résoudre l'équation $B^2+B=0$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.
   a) Calculer $A^2-3A+2I_3$ et en déduire que A est inversible.
   b) Donner A^{-1}.

Exercice 15 :

Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X]\\ P & \longmapsto & 12P-2XP'-X^2P''-10P'(0)X+P'''\end{array}$

Déterminer $Im(f)$et $Ker(f)$.

Exercice 16 :

Soit $u:\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a-d & b-d\\ a-b & 2a-b-d\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Déterminer $Ker(u)$, $Im(u)$
2) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=Ker(u)\oplus Im(u)$?

Exercice 17 :

Nature des séries suivantes

$$\sum\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}\quad \text{et}\quad \sum\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

Exercice 18 :

1) Au restaurant, vous prenez la formule entrée-plat-dessert. Vous avez le choix entre 4 entrées, 3 plats et 5 desserts. Combien de fois pouvez-vous aller dans ce restaurant sans prendre la même formule ?
2) Combien peut-on écrire de numéros de téléphones distincts (on supposera que tous les numéros commencent par 0) ?
3) La classe de PTSI a gagné le concours de la classe « qui aime le plus les maths en France ». Un groupe de 3 étudiants doit être choisi parmi les 35 pour aller récupérer ce prix.
   a) Combien y-a-t-il de groupes possibles ?
   b) Dans ce groupe, une fille excactement doit être présente (sachant qu'il y a 9 filles dans la classe). Combien y-a-t-il de groupes possibles ?
4) Le futur président doit choisir 8 étudiants de prépa parmi 20 PTSI et 18 PCSI.
   a) De combien de façons peut-il constituer ce groupe ?
   b) De combien de façons peut-il constituer ce groupe avec uniquement des PTSI ?
   c) De combien de façons peut-il constituer ce groupe avec au moins un PTSI et au moins un PCSI ?

Exercice 19 :

Soit ABC un triangle tel que $A(7,-1)$, $B(3,1)$ et $C(1,7)$.
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 20 :

Montrer en utilisant la formule de Taylor Lagrange que :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\qquad \left|\tan(x)-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\right|\leq\frac{64}{15}x^5$$