f1

ex 1

1) $D_F = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} x(x+1) > 0 \\ 2x+1 \neq 0 \end{array} \right\}$

x	$-\infty$; -1	-1 ; $-1/2$	$-1/2$; 0	0 ; $+\infty$
x	−	−	− 0	+
$x+1$	− 0	+	+	+
$2x+1$		0		
$F(x)$	+ ‖	− ‖	− ‖	+

$$D_F =]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$$

2) F dérivable sur D_F comme produit, quotient, composée de fcts dérivables

$$\forall x \in D_F,\quad F(x) = \ln(x(x+1)) - \ln((2x+1)^2)$$

d'où

$$\forall x \in D_F,\quad F'(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - \frac{2 \times 2(2x+1)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1}{x(x+1)} - \frac{4}{2x+1}$$

$$, F'(x) = \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$

3)

x	$-\infty$; -1	-1 ; $-1/2$; 0	0 ; $+\infty$
x	−		+
$x+1$	−		+
$2x+1$	−	0	+
$f(x)$	− ‖		‖ +

f ↗ sur $]-\infty, -1[$

f ↘ sur $]0; +\infty[$

4)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}}_{k \text{ impair}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}}_{k \text{ pair}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

d'où

$$H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \quad \blacksquare$$

b) $\forall x \in D_f,\quad \dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{2x+1}$

c) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{H(n)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}_{\text{glisst + gestion}} - 4\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}}_{\text{Q4.a + ajouter valeur pour } k=0}$$

$$S_n = H(n) + \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}}_{\text{+1-1 et on sort le dernier}} - 4\left(H(2n+1) - 1 - \frac{1}{2}H(n)\right) = H(n) + \left(H(n) - 1 + \frac{1}{n+1}\right) - 4H(2n+1) + 4 + 2H(n)$$

$$S_n = 3 + 4(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}$$

c) $$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 1$$

d'où

$$\ln(n+1) \sim \ln(n)$$

D'après Q5.b

$\forall n \geq 2$.

$$\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}_{\longrightarrow 1} + \underbrace{\frac{-\ln(2)+1}{\ln(n)}}_{\longrightarrow 0} \leq \frac{H(n)}{\ln(n)} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{\ln(n)}}_{\longrightarrow 1}$$

T. Encad^r

$$\lim_{+\infty} \frac{H(n)}{\ln(n)} = 1$$

d'où $\quad H(n) \sim \ln(n)$

6) $$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{+\infty}{=} 3 + 4\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) - 4\left(\ln(2n+1) + \gamma + o(1)\right) + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{o(1)}$$

$$\underset{+\infty}{=} 3 + 4\ln(n) + \cancel{4\gamma} + o(1) - 4\ln\left(2\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right) - \cancel{4\gamma}$$

$$\underset{+\infty}{=} 3 + 4\ln(n) + o(1) - 4\ln(2) - 4\ln\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} 3 - 4\ln(2) + 4\ln\left(\frac{n}{n+1/2}\right) + o(1)$$

$$\underset{+\infty}{=} 3 - 4\ln(2) + \underbrace{4\ln\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}}_{\longrightarrow 1}\right)}_{\longrightarrow 0,\ \text{donc } o(1)} + o(1)$$

$$\underset{+\infty}{=} 3 - 4\ln(2) + o(1)$$

d'où

$$\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 - 4\ln(2)$$

5a) soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t}$ $\searrow$ sur $[k, k+1]$
$\searrow$ sur $[k-1, k]$

$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$	$\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$
d'où par $\nearrow$ de l'$\int$ $\quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$	$, \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$
d'où $\quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$	d'où $\quad \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$

d'où

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$$

b)

$$\underbrace{\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt}_{\text{Chasles}} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt}_{\text{Chasles}}$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + 1 - 1 \leq \ln(n)$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq H(n) - 1 \leq \ln(n)$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H(n) \leq \ln(n) + 1$$

ex 2

1) a) Resolvons ds $\mathbb{C}$, $z^4+1=0 \iff z^4=-1 \iff z^4 = e^{i\pi}$

$$S = \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)},\ k\in[\![0,3]\!] \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

d'où

- $X^4+1 = \left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$ ds $\mathbb{C}[X]$
- $X^4+1 = \left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$

$$= \left(X^2-\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)X+1\right)\left(X^2-\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)X+1\right)$$

$$= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right) \quad \text{ds } \mathbb{R}[X]$$

b) $$\int_0^1 \frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,du = \int_0^1 \frac{1}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}u+1\right)^2}\,du$$

$$= 2\times\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}u+1\right)\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}+1\right)-\operatorname{Arctan}(1)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{\pi}{4}\right)$$

2) $\mathcal{E}$ continue sur $[0;\pi/4]$ comme comp de fcts continues
$\mathcal{E}$ derivable sur $]0;\frac{\pi}{4}]$ comme comp de fcts derivables

$\mathcal{E}' : x \mapsto \frac{1}{2n}\left(1+\tan^2(x)\right)\left(\tan(x)\right)^{\frac{1}{2n}-1}$ positive sur $]0;\pi/4]$

Donc $\mathcal{E}$ cont ↗↗ de $[0;\frac{\pi}{4}]$ ds $f([0;\frac{\pi}{4}]) = [0;1]$

Soit $y\in[0,1]$, resolvons sur $[0;\pi/4]$

$y = \tan(x)^{1/2n} \iff y^{2n} = \tan(x) \iff x = \operatorname{Arctan}\left(y^{2n}\right)$

$$\mathcal{E}^{-1} : \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & [0;\pi/4] \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}\left(x^{2n}\right) \end{array}$$

3) $\varepsilon \in \mathcal{C}^1(]0;\frac{\pi}{4}], \mathbb{R})$ (comp de fcts $\mathcal{C}^1$...)

Reste le pb en 0

$\lim_{x \to 0^+} \varepsilon'(x) = +\infty$ (car $\lim_{0^+} 1 + \tan^2(x) = 1$ et

$\lim_{0^+} \frac{1}{(\tan(x))^{1-\frac{1}{2n}}} = +\infty$ $(1 - \frac{1}{2n} > 0)$

d'où, d'après le théo de la limite de la dérivée ε n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi/4]$

4) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [0;\pi/4]$, $0 \leq \varepsilon(x) \leq 1$

Par $\nearrow$ de l'$\int$ $0 \leq K_n \leq \pi/4$

d'où (K_n) bornée et donc majorée par $\pi/4$.

inutile

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n} \in]0;\frac{1}{2}] \subset]0,1]$ et $\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n}$.

d'où

$\forall X \in [0,1]$, $0 \leq X^{\frac{1}{2n}} \leq X^{\frac{1}{2n+1}} \leq 1$

d'où

$\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$, $0 \leq (\tan(x))^{1/2n} \leq (\tan(x))^{\frac{1}{2(n+1)}} \leq 1$

Par $\nearrow$ de l'$\int$, $0 \leq K_n \leq K_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$

d'où

$(K_n) \nearrow$ majorée par $\frac{\pi}{4}$

TLM, (K_n) cv vers ℓ $(\ell \in [0;\pi/4])$

5) $\begin{cases} u = \varepsilon(x) \\ \dfrac{du}{dx} = \varepsilon'(x) \end{cases}$ $\begin{cases} \varepsilon(0) = 0 \\ \varepsilon\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \varepsilon \text{ bij de } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ ds } [0, 1] \end{cases}$

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{\cancel{1+\tan^2(x)}} \frac{1}{2n} \cancel{(1+\tan^2(x))} (\tan(x))^{\frac{1}{2n}-1} dx$$

d'où

$$I_n = \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{1/2n} dx = \frac{K_n}{2n}.$$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n\, I_n = K_n$.

or $\lim K_n = \ell$ (mq $\ell > 0$ ...)

d'où $\lim 2n\, I_n = \ell$

d'où $2n\, I_n \sim \ell$

d'où $I_n \sim \dfrac{(\ell/2)}{n}$

soit $K = \dfrac{\ell}{2}$

$$I_n \sim \frac{K}{n}$$

Reste à mq que $\ell > 0$

(K_n) croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $K_n \geqslant K_1 = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan(x)}\, dx$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan(x)}\, dx = \underbrace{\int_0^{\pi/8} \underbrace{\sqrt{\tan(x)}}_{\geqslant 0} dx}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{\pi/8}^{\pi/4} \underbrace{\sqrt{\tan(x)}}_{>0} dx}_{>0} > 0$

d'où $\ell = \lim K_n \geqslant K_1 > 0$

Algèbre

ex 1

1) Soit $(M, M') \in S^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Mq $\lambda M + \mu M' \in S$

$$A(\lambda M + \mu M') = \lambda AM + \mu AM' \underset{\substack{\text{car } M \in S \\ M' \in S}}{=} \lambda MA + \mu M'A = (\lambda M + \mu M')A$$

Donc S ss.e.v de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Donc S e.v

2) $AI_3 = A = I_3 A$; $AA = AA$, $AA^2 = AAA = A^2A$

donc I_3, A, A^2 sont des élts de S e.v

donc $\text{Vect}(I_3, A, A^2)$ plus petit e.v contenant (I_3, A, A^2) inclus dans S

3) Soit $M \in S$

a) $AM = MA \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = e \\ b = f \\ d = h \\ e = i \\ f = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = c = f = 0 \\ a = e = i \\ d = h \end{cases}$

b) D'après Q3.a,

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = aI_3 + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $M = aI_3 + dA + gA^2$

d'où $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$, $(\alpha = a, \beta = d, \gamma = g)$

4) D'après Q3b

Tte mat de S s'écrit comme combi linéaire de I_3, A, A^2

D'où $S \subset \text{Vect}(I, A, A^2)$

De plus, d'après Q2, $\text{Vect}(I, A, A^2) \subset S$

D'où, par double inclusion

$$S = \text{Vect}(I, A, A^2)$$

De plus (I, A, A^2) libre car

$\lambda I + \mu A + \gamma A^2 = 0 \Rightarrow \lambda A^2 + \underbrace{\mu A^3}_{0} + \underbrace{\gamma A^4}_{0} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$; $\mu A + \gamma A^2 = 0 \Rightarrow \mu A^2 + \underbrace{\gamma A^3}_{0} = 0 \Rightarrow \mu = 0$ et $\gamma A^2 = 0 \Rightarrow \gamma = 0$. $\dim \text{Vect}(I, A, A^2) =$

f_2

4) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \neq O_3$ et $A^3 = O_3$

D'où $A \in S'$

b) $A \in S'$, $-A \in S'$ (évident)

Mais $A + (-A) = O_3 \notin S'$ car ${O_3}^2 = O_3$

Donc S' n'est pas stable par combi linéaire

Donc S' n'est pas un e.v

c) $M^2 = (PAP^{-1})^2 = PAP^{-1}PAP^{-1} = PAIAP^{-1} = PA^2P^{-1}$

et $M^2 \neq O_3$ car si $M^2 = 0$, alors $O_3 = PA^2P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}O_3P = A^2$

$\Leftrightarrow O = A^2$ absurde car $A \in S'$

- $M^3 = PA^3P^{-1} = PO_3P^{-1} = O_3$

donc $M \in S'$

6) a) $NX = \begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix}$; $N^2X = \begin{pmatrix} 2\\0\\2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1&1&2\\2&0&2\\0&1&0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1&1&2\\0&-2&-2\\0&1&0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1&1&2\\0&1&0\\0&-2&-2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1&1&2\\0&1&0\\0&0&-2 \end{pmatrix}$ mat de rang 3 donc f libre de 3 vect ds $\mathbb{R}^3$ ev de dim 3

Donc (X, NX, N^2X) base de $\mathbb{R}^3$

c)
$$\begin{array}{cccc} f(X) & f(NX) & f(N^2X) & \\ \left(\begin{array}{c} 0\\1\\0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0\\0\\1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0\\0\\0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} X\\NX\\N^2X \end{array} \end{array} = A$$

d) D'après Q 6.c et f de Chg^t de base

$$A = \underset{B'}{\mathrm{Mat}}(f) = (P_{B,B'})^{-1} N (P_{B,B'})$$

où

$B' = (X, NX, N^2X)$

B b.c de $\mathbb{R}^3$

ex 2 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f2^+$

Préambule

a) Mq f_n appli lin

soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$f_n(\lambda P + \mu Q) = \frac{1}{2}(X^2-1)(\lambda P+\mu Q)''(1) - X(\lambda P + \mu Q)'(1) + (\lambda P + \mu Q)$$
$$= \frac{1}{2}(X^2-1)(\lambda P''(1) + \mu Q''(1)) - X\lambda P'(1) - X\mu Q'(1) + \lambda P + \mu Q$$
$$= \lambda\left(\frac{1}{2}(X^2-1)P''(1) - XP'(1) + P\right) + \mu\left(\frac{1}{2}(X^2-1)Q''(1) - XQ'(1) + Q\right)$$
$$= \lambda f_n(P) + \mu f_n(Q)$$

Donc f appli linéaire.

- Mq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
  - Clair^t, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}[X]$
  - Reste à mq

    $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, ie $\deg(f_n(P)) \leq n$

Or, $\deg\left(\frac{1}{2}(X^2-1)P''\right) \leq 2+n-2 = n$

$\deg(XP') \leq 1+n-1 = n$

$\deg(P) \leq n$

d'où $\deg(f_n(P)) \leq n$

donc $f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

donc $\underline{f_n \text{ endo}}$

I. 1) $f_3(1) = 1$; $f_3(X) = -X + X = 0$; $f_3(X^2) = \frac{1}{2}(X^2-1)\times 2 - X2X + X^2 = -1$

$$f_3(X^3) = \frac{1}{2}(X^2-1)6X - X3X^2 + X^3 = 3X^3 - 3X - 3X^3 + X^3 = -3X + X^3$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\operatorname{Im} M_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, d'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1, -3X+X^3)$

3) D'après le théo du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

« Très clair »

$$\operatorname{Ker} M_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right), \text{ d'où } \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1+X^2, X)$$

4) OUI :)

$$\operatorname{Vect}(\underbrace{1, X, 1+X^2, -3X+X^3}_{\substack{f \text{ libre (poly d° échelonnés)} \\ \text{de 4 vect}}}) = \mathbb{R}_3[X]$$

5) f_3 proj $\iff M_3^2 = M$.

Or $M_3^2 = M_3$ (faire le calcul)

d'où f_3 proj.

II. 6) $f_4(1) = 1$; $f_4(X) = 0$; $f_4(X^2) = -1$; $f_4(X^3) = -3X + X^3$

$$f_4(X^4) = \frac{1}{2}(X^2-1)12X^2 - X4X^3 + X^4 = 6X^4 - 6X^2 - 4X^4 + X^4 = 3X^4 - 6X^2$$

7)
$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{R}$$

8) $C^2 = C$ (clair)

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&9 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-18 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&9 \end{pmatrix} = 3R \quad ; \quad CR = RC = 0_5$$

9) $\text{rang}(C) = 2$ (col 1 et 4 par ex)

$\text{rang}(R) = 1$ (1 ! col $\neq \vec{0}$)

10) C et R commutent ($CR = RC$)

D'après la f du Binôme

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad M_4^p = (C+R)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} C^k R^{p-k} = \binom{p}{0} R^p + \binom{p}{p} C^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \underbrace{C^k R^{p-k}}_{=0}$$

car $C^k R^{n-k} = C^{k-1} \underbrace{CR}_{0} R^{n-k-1} = 0$

d'où

$$M_4^p = R^p + C^p$$

Or (rec pas indispensable :-))

$$C^p = C \quad \text{et} \quad R^p = 3^{p-1} R$$

d'où

$$M_4^p = \underbrace{1}_{\alpha_p} C + \underbrace{3^{p-1}}_{\beta_p} R$$

III).11) Soit $P = a_k X^k + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j}_{Q \text{ poly de degré } \leq k-1}$, où $a_k \neq 0$ et $k \geq 3$

$f_n(Q)$ est un poly de degré $\leq k-1$ car

- $\deg((X^2-1)Q'') \leq 2 + k - 3 = k-1$
- $\deg(XQ') \leq 1 + k - 2 = k-1$
- $\deg(Q) \leq k-1$

d'où $\deg f(Q) \leq k-1$

Déterminons

$$f_n(a_k X^k) = \frac{1}{2}(X^2-1) a_k k(k-1) X^{k-2} - X k a_k X^{k-1} + a_k X^k$$

$$= a_k \left(\frac{k(k-1)}{2} - k + 1 \right) X^k - \frac{1}{2} a_k k(k-1) X^{k-2}$$

$$= a_k \left(\frac{k^2 - 3k + 2}{2} \right) X^k - \frac{1}{2} a_k k(k-1) X^{k-2}$$

$f_n(a_k X^k) = \underbrace{\frac{1}{2} a_k (k-1)(k-2) X^k}_{\substack{\neq 0 \text{ car} \\ a_k \neq 0,\ k \geq 3}} - \frac{1}{2} a_k k(k-1) X$

d'où, l'image des ~~tt~~ poly de degré sup ou egal à 3 est un poly de degré sup ou egal à 3 (et donc non nul).

12) D'après Q 11, si $P \in \operatorname{Ker} f_n$, son degré n'est pas superieur ou egal à 3

Donc, si $P \in \operatorname{Ker} f_n$, alors $\deg(P) < 3$, ie $\deg(P) \leq 2$)

13) Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$$f_n(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)\, 2a_2 - X(a_1 + 2a_2 X) + a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

$$= \cancel{a_2 X^2} - a_2 - \cancel{a_1 X} - \cancel{2a_2 X^2} + a_0 + \cancel{a_1 X} + \cancel{a_2 X^2}$$

$$= a_0 - a_2.$$

$P \in \operatorname{Ker}(f_n) \iff a_0 = a_2$

d'où $P = a_0(1+X^2) + a_1 X$

$\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Vect} \underbrace{(X, 1+X^2)}_{\text{f libre (poly d}^{\circ}\text{...)}}$, d'où $\dim \operatorname{Ker} f_n = 2$

14) D'après T. Rang

$\dim \operatorname{Im} f_n = n+1-2 = n-1$

15)

$f_n(1) = 1$, $f_n(X) = 0$; $f_n(X^2) = -1$

La famille $(f_n(1), f_n(X), f_n(X^2), \dots, f_n(X^n))$ est generatrice de $\operatorname{Im} f_n$

Or $f_n(1) = -f_n(X^2)$ et $f_n(X) = 0$

donc la f $(f_n(1), f_n(X^3), \dots, f_n(X^n))$ est generatrice de $\operatorname{Im} f_n$

et contient $n-1 = \dim \operatorname{Im} f_n$ vect

Donc $(f_n(1), f_n(X^3), \dots, f_n(X^n))$ base de $\operatorname{Im} f_n$

16) a) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Supp $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ /

$$Q = f_n(P) \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P$$

Alors, en dérivant

$$Q' = \frac{1}{2} \times 2XP'' + \frac{1}{2}(X^2-1)P^{(3)} - \cancel{P'} - XP'' + \cancel{P'}$$

$$\Leftrightarrow Q' = \cancel{X}P'' + \frac{1}{2}(X^2-1)P^{(3)} - X\cancel{P''}$$

$$\Leftrightarrow Q' = \frac{1}{2}(X^2-1)P^{(3)}$$

b) Si $Q \in \operatorname{Im} f_n$, d'après Q16.a

$\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ / $Q' = \frac{1}{2}(X^2-1)P^{(3)}$

si on évalue la relation en 1 et en -1, on a

$Q'(1) = 0$
$Q'(-1) = 0$

D'où $Q \in \operatorname{Im} f_n \Rightarrow (Q'(1) = Q'(-1) = 0)$

17) a) Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$u(\lambda P+\mu Q) = \begin{pmatrix} (\lambda P+\mu Q)'(1) \\ (\lambda P+\mu Q)'(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P'(1) + \mu Q'(1) \\ \lambda P'(-1) + \mu Q'(-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P'(1) \\ P'(-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} Q'(1) \\ Q'(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda u(P) + \mu u(Q) \quad \square$$

b) $H = \operatorname{Ker} u$. Or $\operatorname{Ker} u$ ss. e.v de $\mathbb{R}_n[X]$, d'où H ss. ev de $\mathbb{R}_n[X]$

c) $u(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u(X^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ f « clair » libre » de 2 vect de $\mathbb{R}^2$
donc base de $\mathbb{R}^2$

d) D'où u surj, d'où $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ et $\dim \operatorname{Im} u = 2$

T. Rang, $\dim \operatorname{Ker} u = n+1-2 = n-1$, d'où $\dim H = n-1$

e) H ss. e.v de $\mathbb{R}_n[X]$, de dim $n-1$
$\operatorname{Im} f_n$ e.v de dim $n-1$
De plus Q16b $\operatorname{Im} f_n \subset H$. Or, le seul ss. ev. de $\hat{m}$ dim que l'esp est l'esp lui $\hat{m}$, d'où $H = \operatorname{Im} f_n$