Concours blanc : Analyse

Exercice 1 - Des fractions et des sommes.

On considère la fonction qui, à tout réel x de son ensemble de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right).$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_F$.

2. Justifier que F est dérivable sur son ensemble de définition, et montrer que sa dérivée, notée f, vérifie

$$\forall x \in \mathcal{D}_F, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f, en précisant ses limites au bornes.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a. Montrer que

$$H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

b. Donner la décomposition en éléments simples de la fonction f.

c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

5. **a.** Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leqslant H(n) \leqslant \ln(n) + 1.$$

c. Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis en déduire que $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

6. Inspiré par la question **Q5**, on admet qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$H(n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Montrer à l'aide de la question **Q4** que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 - 4\ln 2.$$

Exercice 2 - Une suite d'intégrales. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \, \mathrm{d}u.$$

1. (Indépendant de la suite).

a. Factoriser sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ le polynôme X^4+1.

b. Déterminer $\int_0^1 \frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1} \, \mathrm{d}u$.

Les deux questions précédentes suggèrent qu'il est possible (mais pénible) de calculer I_1, ce que l'on ne demande pas de faire. On se doute que calculer explicitement I_n va être compliqué, et la suite du problème propose d'étudier des propriétés de la suite (I_n).

2. On introduit la fonction φ, définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $\varphi(x) = \tan(x)^{\frac{1}{2n}}$. Justifier que la fonction φ définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur un ensemble à préciser, et déterminer la bijection réciproque φ^{-1}.

3. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{4}]$, et calculer sa dérivée.

4. **a.** Déterminer la limite (si elle existe) de $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ en 0.

b. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

5. On introduit l'intégrale

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{2n}} \, \mathrm{d}x.$$

Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante majorée. Qu'en déduire ?

6. En utilisant le changement de variable $u = \varphi(x) = \tan(x)^{\frac{1}{2n}}$, montrer que $I_n = \frac{K_n}{2n}$.

7. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ (que l'on ne demande pas de calculer) telle que

$$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{K}{n}.$$