DST 1

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 6 exercices indépendants.

Exercice 1 - Une fraction de sinusoïdes.

1. (Question préliminaire).

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1.$$

b. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x \geqslant 1.$$

2. On souhaite définir et étudier la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{\sin x + \sqrt{3}}$$

a. Justifier que l'on peut définir la fonction sur $\mathbb{R}$, et montrer qu'elle est 2π-périodique.

b. Calculer sa dérivée.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

d. Donner une équation de la tangente de f en $x = \pi$.

e. Etablir le tableau de variation de f sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 2 - Moments de l'exponentielle .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x.$$

1. Déterminer I_0 et I_1.

2. Déterminer I_2.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant e.$$

4. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire qu'elle converge vers une limite notée ℓ. Donner un encadrement de ℓ.

5. Pour $n \geqslant 0$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

6. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (pour cela, vous supposerez que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite différente de 0, et à l'aide des questions précédentes, vous déduirez que cela est absurde).

Exercice 3 - Une équation différentielle d'ordre un. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) - 3y(t) = te^{-t},$$

d'inconnue une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto (\alpha t+\beta)e^{-t}$.

2. Existe-t-il des solutions qui vérifient $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$? Si oui, les déterminer.

Exercice 4 - Racine d'un trinôme .

1. Etudier et tracer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4 - x^2$.

2. On souhaite définir la fonction $g : x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$. Proposer un domaine de définition, le plus grand possible pour cette fonction.

3. Déterminer g' (on précisera le domaine de définition de g', c'est-à-dire là où g est dérivable).

Exercice 5 - Une équation différentielle d'ordre deux. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + 9y(t) = \sin 2t, \tag{1}$$

d'inconnue une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).

2. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (1) qui vérifient $y(0) = y(\pi) = 0$.

Exercice 6 - Nombres complexes.

1. (Deux questions de cours)

- **a.** Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de son conjugué $\overline{z}$. Montrer la formule
$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$
- **b.** Démontrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
Illustrer sur un dessin.

2.
- **a.** Placer le point d'affixe $-1 + 2i$ dans le plan. Calculer $|-1 + 2i|$.
- **b.** Donner la forme algébrique de $\frac{3+i}{-1+2i}$.
- **c.** Calculer $(3 - 2i)^4$. On pourra utiliser
$$\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
- **d.** Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z + i| < 1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on introduit le nombre complexe $z(x) = \cos 2x + i \sin 2x$. Donner la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $1 + z(x)$. En déduire son module en fonction de $\cos x$. Illustrer sur un schéma, sur lequel on placera les images de $z(x)$ et $1 + z(x)$, la formule démontrée.