DST 1
Corrigé

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 6 pages et 6 exercices indépendants.

Exercice 1 - Une fraction de sinusoïdes.

1. a. Transformons le membre de gauche. On cherche $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x - \sqrt{3}\sin x = r\cos(x - \phi).$$

On sait que r et ϕ sont donnés par

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{et} \quad \phi \in \mathbb{R} \ \text{ vérifie } \ \begin{cases} \cos\phi = \frac{1}{2} \\ \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

On déduit que $\phi = -\frac{\pi}{3}$, et donc

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x + \frac{\pi}{3}).$$

<u>Remarque</u> : Il est clair que cette question impacte tout l'exercice. Vérifiez votre réponse en développant $\cos(x + \frac{\pi}{3})$ avec la formule d'addition.

On utilise cette tranformation :

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 \iff 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \iff \cos(X) = \frac{1}{2} \quad \text{avec } X = x + \frac{\pi}{3}.$$

On résout cette équation trigonométrique (le cercle peut aider) :

$$\begin{aligned} \cos X = \frac{1}{2} &\iff X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ ou } \ X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = 2k\pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On pouvait aussi raisonner en terme de modulo. Dans tous les cas on vérifie que les valeurs trouvées marchent.

b. Encore une fois, on utilise la **Q1a** :

$$\begin{aligned} \cos x - \sqrt{3}\sin x \geqslant 1 &\iff \cos(x + \frac{\pi}{3}) \geqslant \frac{1}{2}, \\ &\iff -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

En dessinant cette portion du cercle trigo, on obtient les solutions dans $]-\pi, \pi]$:

$$\mathcal{S} = [-\frac{2\pi}{3}, 0].$$

2. **a.** On doit véfirifier que le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x + \sqrt{3} \geqslant \sqrt{3} - 1 > 0,$$

donc c'est bien le cas, et la fonction est bien déinie comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. On a de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi) - 1}{\sin(x + 2\pi) + \sqrt{3}} = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + \sqrt{3}} = f(x),$$

ce qui indique que la fonction est 2π-périodique.

b. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On applique la formule pour la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x) \times (\sin x + \sqrt{3}) - (\cos x - 1) \times \cos x}{(\sin x + \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1}{(\sin x + \sqrt{3})^2}, \quad \text{en utilisant} \quad \cos^2 + \sin^2 = 1 \end{aligned}$$

c. On a

$$f(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x \in \{2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

d. Une équation de la tangente à la courbe de f en a est :

$$y = f(a) + (x - a)f'(a),$$

ici avec $a = \pi$:

$$y = \frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}(x - \pi).$$

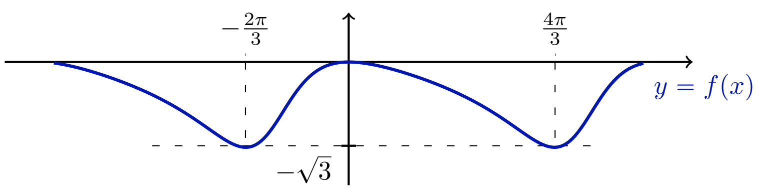
e. On constate que $f'(x)$ est du signe de $\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1$. Or l'inéquation $\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1 \geqslant 0$ a été résolue sur $]-\pi, \pi]$ à la question **Q1c**. On déduit que sur

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f'(x) \geqslant 0 \iff x \in [-\frac{2\pi}{3}, 0],$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte sur $]-\frac{2\pi}{3}, 0[$. On forme le tableau de variation (on peut mettre les valeurs même si seule la valeur en 0 est réellement pertinente).

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		π
$D'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	$-\sqrt{3}$	↗	0	↘	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

Traçons la fonction (non demandé). On peut s'aider du tableau de variation sur $[-\pi, \pi]$, puis on utilise la 2π périodicité pour compléter le graphe sur $\mathbb{R}$. Voici le graphe précis :



Bien sûr, si on vous demande un tel graphe, on attend dans une copie un graphe approximatif, avec les éléments clefs indiqués ci-dessus.

Exercice 2 - Moments de l'exponentielle .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x.$$

1. On a par un calcul direct
$$I_0 = \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e - 1.$$
Le calcul de I_1 se fait par une intégration par parties directe (possibles car les fonctions sont de classe C^1), en dérivant $x \mapsto x$ et en primitivant $x \mapsto e^x$:
$$I_1 = \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \,\mathrm{d}x = e - I_0 = 1.$$

2. On réalise encore une ipp :
$$I_2 = \int_0^1 x^2e^x \,\mathrm{d}x = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2x \times e^x \,\mathrm{d}x = e - 2I_1 = e - 2.$$

3. On a
$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^n \leqslant 1,$$
et donc en multipliant par l'exponentielle qui est positive
$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^n e^x \leqslant e^x \leqslant e,$$
d'où en intégrant :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e \,\mathrm{d}x = e.$$

4. Soit $n \geqslant 0$,
$$\forall x \in [0,1], \quad x^{n+1} \leqslant x^n,$$
et donc en mutipliant par l'exponentielle qui est positive :
$$\forall x \in [0,1], \quad x^{n+1}e^x \leqslant x^n e^x,$$
d'où en intégrant :
$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n \leqslant I_{n+1}.$$
Ceci prouve que la suite est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 d'après la **Q3**. Or toute suite minorée décroissante converge (théorème de la limite monotone), donc la suite converge. Notons ℓ sa limite. D'après **Q3**, on a $0 \leqslant \ell \leqslant e$ (et même $0 \leqslant \ell \leqslant I_2$ en utilisant la décroissance).

5. Considérons I_{n+1} et cherchons à la relier à I_n. On réalise une ipp en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$ et en primitivant $x \mapsto e^x$:
$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x \,\mathrm{d}x = [x^{n+1}e^x] - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x \iff I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$
On vérifie que cette relation est bien celle trouvée pour $n = 0$ et $n = 1$ aux questions précédentes.

6. On sait déjà d'après **Q4** que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge, notons ℓ sa limite. On sait que $\ell \geqslant 0$. Supposons $\ell \neq 0$, l'idée est d'exploiter la relation de récurrence pour aboutir à une contradiction.
$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = +\infty,$$
et donc par passage à la limite dans la relation de récurrence :
$$\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = -\infty$$
ce qui est absurde.
Donc $\ell = 0$.

Exercice 3 - Une équation différentielle d'ordre un.

1. Il y a trois étapes pour résoudre cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre : résoudre l'équation homogène associée, trouver une solution particulière, utiliser le théorème de superposition.

Commençons par associer l'équation homogène :

$$y' - 3y = 0,$$

qui a pour solution $y_0(t) = \lambda e^{3t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ensuite, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-t}$, avec α et β à déterminer. On a

$$y_p'(t) - 3y_p(t) = \alpha e^{-t} + (\alpha t + \beta) \times (-e^{-t}) - 3(\alpha t + \beta)e^{-t} = (-4\alpha t + \alpha - 4\beta)e^{-t}.$$

Ainsi, pour que y_p soit solution, il suffit de prendre (α, β) tel que

$$\begin{cases} -4\alpha = 1 \\ \alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{1}{16} \end{cases}.$$

On conclut avec le théorème de superposition : les solutions des l'équation différentielle $y'(t) - 3y(t) = te^{-t}$, sont de la forme

$$y : t \mapsto y_0(t) + y_p(t) = \lambda e^{3t} - (\frac{t}{4} + \frac{1}{16})e^{-t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^2.$$

2. On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{4} + \frac{1}{16} = +\infty \end{cases}$$

et donc par croissance comparée, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} y_p(t) = 0$. Ainsi, seule la partie issue de la solution homogène peut tendre vers $-\infty$. Or on a

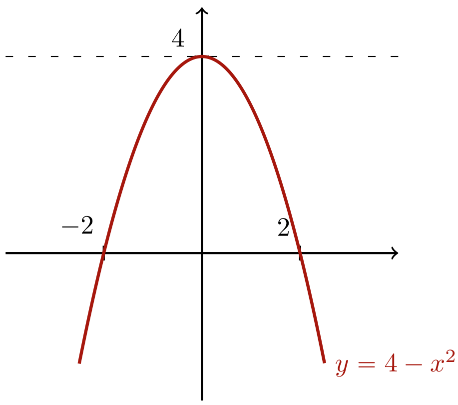
$$\lim_{t\to+\infty} e^{3t} = +\infty$$

et donc

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty \iff \lambda < 0.$$

Exercice 4 - Racine d'un trinôme .

1. Il s'agit d'une parabole tournée vers le bas, paire, qui a pour maximum 4, atteint en $x = 0$. Ses deux racines sont 2 et -2. En cas de doute, on peut donner la dérivée et faire un tableau de variations.



2. Posons $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Notons également $f : x \mapsto 4 - x^2$ étudiée à la question précédente. Pour définir g, on résout l'inéquation

$$f(x) = 4 - x^2 \geqslant 0 \iff x \in [-2, 2].$$

Ainsi, la fonction $g = h \circ f$ est bien définie sur $[-2, 2]$.

3. La fonction r n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$. Or $4-x^2>0 \iff x\in]-2,2[$. Ainsi, g est dérivable sur $]-2,2[$. Pour calculer la dérivée, on applique la formule de la dérivée d'une composée (ou, ce qui revient au même, on dérive $\sqrt{f}$) :

$$\forall x\in]-2,2[,\quad g'(x)=f'(x)r'(f(x))=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{x}{4-x^2}.$$

On constate qu'en effet, lorsque $x=2$ et $x=-2$, cette formule ne peut s'appliquer. On pourra justifier plus tard qu'en effet, g n'est pas dérivable en ces deux points.

Exercice 5 - Une équation différentielle d'ordre deux. On considère l'équation différentielle

$$y''(t)+9y(t)=\sin 2t, \tag{1}$$

d'inconnue une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1. Il y a trois étapes pour résoudre cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

- On associe et on résout l'équation homogène,

$$y''+9y=0.$$

A cette équation on associe l'équation caractéristique $r^2+9=0$, d'inconnue $r\in\mathbb{R}$. Son discriminant est $\Delta=-36$. Ainsi, l'équation caractéristique n'a pas de racines réelles, mais deux racines complexes

$$r_1=-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}=-3i\quad\text{et}\quad r_2=i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}=3i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont alors données par

$$y_0:t\mapsto\lambda\cos(3t)+\mu\sin(3t),\qquad\text{avec }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Notez que l'on peut (et doit !) connaître les solutions de cette équations différentielles par coeur, et que le passage par les racines complexes n'est à ce stade pas obligatoire.

- On cherche une solution particulière. Puisque le second membre est une fonction trigonométrique, on essaye le candidat

$$y_p(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t),\qquad\text{avec }(A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

Injectons cette fonction dans l'équation différentielle :

$$y_p''(t)+9y_p(t)=-4A\cos 2t-4A\sin 2t+9A\cos 2t+9A\sin 2t=5A\cos 2t+5B\sin 2t$$

et on a donc

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y_p''(t)+9y_p(t)=\sin 2t\iff\begin{cases}A=0\\ B=\frac{1}{5}\end{cases}.$$

Ainsi, la fonction $y_p:t\mapsto\frac{1}{5}\sin 2t$ est solution particulière de l'équation différentielle.
Notez qu'ici on pouvait directement tenter une solution particulière sous la forme $t\mapsto B\sin 2t$, cela est dû au fait qu'il n'y a pas de terme en y' dans l'équation.

- On conclut avec le théorème de superposition : les solutions des l'équation différentielle (1) sont de la forme

$$y:t\mapsto y_0(t)+y_p(t)=\lambda\cos(3t)+\mu\sin(3t)+\frac{1}{5}\sin 2t,\qquad\text{avec }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

2. On résout le système

$$\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=1\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda=1\\ 3\mu+\frac{2}{5}=1\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=\frac{1}{5}\end{cases}.$$

Il y a bien unique solution qui vérifie cette condition initiale :

$$t\mapsto\cos(3t)+\frac{1}{5}\sin(3t)+\frac{1}{5}\sin(2t).$$

3. On résout le système

$$\left\{\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda=0 \end{array}\right. \iff \lambda = 0.$$

Ainsi, les solutions qui vérifient ces conditons sont les fonctions

$$t \mapsto \mu \sin(3t) + \frac{1}{5}\sin 2t, \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 - Nombres complexes.

1. Voir cours.

2. **a.** On a $|-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

b. On utilise la technique du conjugué :

$$\frac{3+i}{-1+2i} = \frac{(3+i)(-1-2i)}{|-1+2i|^2} = \frac{-1-7i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

c. On applique la formule avec $a = 3$ et $b = -2i$.

$$(3-2i)^4 = 3^4 + 4\times 3^3 \times (-2i) + 6\times 3^2 \times (-2i)^2 + 4\times 3\times(-2i)^3 + (-2i)^4$$

Or on a

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad \text{et} \quad i^4 = 1.$$

Ainsi :

$$(3-2i)^4 = 81 - 216i - 216 + 96i + 16 = -119 - 120i.$$

Mieux vaut connaître ses tables de multiplications !

d. Notons $A = (0, -1)$ le point du plan d'affixe $-i$. Alors, si on note M le point d'affixe z, on a

$$|z+i| < 1 \iff |z-(-i)| < 1 \iff AM < 1.$$

Ainsi l'ensemble recherché est le disque ouvert de centre A et de rayon 1.

3. On a

$$1 + z(x) = 1 + \cos 2x + i \sin 2x,$$

d'où $\mathrm{Re}(z(x)) = 1 + \cos 2x$ et $\mathrm{Im}(z(x)) = \sin 2x$. On déduit

$$|z(x)| = \sqrt{(1+\cos 2x)^2 + (\sin 2x)^2} = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \qquad \text{avec } \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$$

Or on a

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x,$$

d'où

$$|z(x)| = \sqrt{4\cos^2 x} = 2|\cos x|.$$