DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une étude de fonction.

Les deux parties sont indépendantes.

1. Soit $f : x \mapsto -\sqrt{x^3 - 1}$.

- **a.** Déterminer l'ensemble de définition de f.
- **b.** Justifier que f est dérivable sur $]1, +\infty[$.
- **c.** Dresser le tableau de variations de f.
- **d.** Montrer que f définit une bijection, en précisant avec soin les ensembles de départ et d'arrivée.
- **e.** Déterminer une expression pour f^{-1}.

2. Soit $g : x \mapsto -\sqrt{e^x + x^3 - 1}$.

- **a.** En étudiant une fonction, montrer que :

$$e^x + x^3 - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0.$$

- **b.** En déduire que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
- **c.** Donner sans calculs (mais en justifiant !) les variations de g.
- **d.** Montrer que g est une bijection, en précisant avec soin les ensembles de départ et d'arrivée.
- **e.** Justifier que g^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition.
- **f.** Déterminer $g^{-1}(-\sqrt{e})$.
- **g.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $-\sqrt{e}$.

Correction :

1. **a.** On a :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 \geqslant 0\}.$$

Or, après une rapide étude de la fonction $x \mapsto x^3$, on a :

$$x^3 - 1 \geqslant 0 \iff x^3 \geqslant 1 \iff x \geqslant 1,$$

d'où $D_f = [1, +\infty[$.

b. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $x \mapsto x^3 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable en tant que composée sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0\} =]1, +\infty[$.

c. Standard, on constate par composée (ou calcul de dérivée) que la fonction f est strictement décroissante, et on complète facilement son tableau.

d. La fonction f est strictement décroissante, et continue, elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image $f([1, +\infty[)$. Par ailleurs :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

donc d'après le corollaire du TVI, on a : $f([1, +\infty[) =] - \infty, 0]$.
Ainsi, f est une bijection de $[1, +\infty[$ dans $] - \infty, 0]$.

e. On fixe $y \in]-\infty, 0]$, et on résout :

$$y = f(x), \quad \text{d'inconnue } x \in [1, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = -\sqrt{x^3 - 1} \\ &\iff y^2 = x^3 - 1 \quad \text{car} \quad y \leqslant 0 \quad \text{et } x^3 - 1 \geqslant 0 \\ &\iff x^3 = y^2 + 1 \\ &\iff x = (y^2 + 1)^{1/3} \quad \text{car} \quad y^2 + 1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Cela prouve que bien $f^{-1} :]-\infty, 0] \to [1, +\infty[$ vérifie $f^{-1} : y \mapsto (y^2 + 1)^{1/3}$.

2. Soit $g : x \mapsto -\sqrt{e^x + x^3 - 1}$.

a. On pose $h : x \mapsto e^x + x^3 - 1 \geqslant 0$. Alors h est strictement croissante en tant que somme de fonction strictement croissante. De plus, $h(0) = 0$. Ainsi, on a $h(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$.

b. La fontion $x \mapsto \sqrt{x}$ étant définie sur $[0, +\infty[$, la fonction g est bien définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} |\ e^x + x^3 - 1 \geqslant 0\} = [0, +\infty[\ \text{ d'après } \mathbf{Q1}.$$

c. La fonction $h : x \mapsto e^x + x^3 - 1$ et la fonction $x \mapsto -\sqrt{x}$ étant strictement décroissantes, la fonction g est strictement décroissante en tant que composée.

d. On applique à nouveau le théorème de la bijection (on passe les détails) : la fonction $g : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ est une bijection.

e. On commence par calculer g' :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^x + 3x^2}{2\sqrt{e^x + 3x^2}}, \quad \text{car } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Il faut vérifier que cette dérivée ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x + 3x^2 > 0,$$

et donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'(x) \neq 0.$$

On déduit que g^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty, 0]$, et que

$$(g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}}.$$

f. On cherche un réel $x \in [0, +\infty[$ tel que $g(x) = -\sqrt{e}$. Il est naturel de tester $x = 1$, et en effet $g(1) = -\sqrt{e}$, ce qui prouve que $g^{-1}(-\sqrt{e}) = 1$.

g. Déterminons $(g^{-1})'(-\sqrt{e})$:

$$(g^{-1})'(-\sqrt{e}) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(-\sqrt{e})} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{2\sqrt{e+3}}{e+3} = \frac{2}{\sqrt{e+3}}.$$

Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $-\sqrt{e}$ est :

$$y = g^{-1}(-\sqrt{e}) + (g^{-1})'(-\sqrt{e})(x + \sqrt{e}) = 1 + \frac{2}{\sqrt{e+3}}(x + \sqrt{e})$$

Exercice 2 - Une inégalité avec des valeurs absolues. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\left| \frac{-3x + 10}{x + 6} \right| \leqslant 1.$$

<u>Correction</u> : Déjà, débarassons-nous de la fraction :

$$\left| \frac{-3x + 10}{x + 6} \right| \leqslant 1 \iff \frac{|-3x + 10|}{|x + 6|} \leqslant 1 \iff |-3x + 10| \leqslant |x + 6| \quad \text{car } |x + 6| \geqslant 0.$$

On raisonne alors selon les signes de $-3x + 10$ et $x + 6$. Les changements de signe ont lieux en -6 et $\frac{10}{3}$ (il est conseillé de faire un tableau de signe). On distingue donc 3 cas :

- Résolution pour $x \in]-\infty, -6]$: On a alors

$$\begin{cases} |-3x+10| = -3x+10 \\ |x+6| = -x-6 \end{cases}$$

et donc

$$|-3x+10| \leqslant |x+6| \iff -3x+10 \leqslant -x-6 \iff 8 \leqslant x.$$

Or $]-\infty,-6] \cap [8,+\infty[= \varnothing$. On n'a donc pas de solution sur $]-\infty,-6]$.

- Résolution pour $x \in [-6, \frac{10}{3}]$: On a alors

$$\begin{cases} |-3x+10| = -3x+10 \\ |x+6| = x+6 \end{cases}$$

et donc

$$|-3x+10| \leqslant |x+6| \iff -3x+10 \leqslant x+6 \iff 1 \leqslant x.$$

Or $[-6, \frac{10}{3}] \cap [1,+\infty[= [1, \frac{10}{3}]$. Les solutions sur $[-6, \frac{10}{3}]$ sont donc $[1, \frac{10}{3}]$.

- Résolution pour $x \in [\frac{10}{3}, +\infty[$: On a alors

$$\begin{cases} |-3x+10| = 3x-10 \\ |x+6| = x+6 \end{cases}$$

et donc

$$|-3x+10| \leqslant |x+6| \iff 3x-10 \leqslant x+6 \iff x \leqslant 8.$$

Or $[\frac{10}{3},+\infty[\cap]-\infty,8] = [\frac{10}{3},8]$. Les solutions sur $[\frac{10}{3},+\infty[$ sont donc $[\frac{10}{3},8]$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $[1,8]$.

Exercice 3 - Trois exercices de sommes. Les trois exercices sont indépendants.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k+1}.$$

a. (Echauffement). Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

b. Déterminer une expression simple de $B_n - A_n$.

c. Soit un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$, montrer que : $(k+1) \times \binom{n}{k+1} = (n-k) \times \binom{n}{k}$.

d. En déduire que : $B_n = n2^n - n - A_n$.

e. En déduire une expression de A_n, puis de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

2. **a.** Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, et montrer votre résultat par récurrence.

b. Rappeler (sans preuve) la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

c. Calculer pour $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$.

d. En déduire pour $n \geqslant 2$, la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|j-i|$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

a. Montrer que $x \mapsto C_n(x)$ est paire et périodique. Donner $C_n(0)$.

b. Calculer $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ pour $x \in]0, 2\pi[$.

c. Proposer une méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sin(kx)$ (il n'est pas nécessaire de conduire les calculs jusqu'au bout).

Correction :

1. **a.** On reconnait un binôme de newton « fantôme » :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n.$$

b. On a par télescopage :

$$B_n-A_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)\binom{n}{k+1}-k\binom{n}{k}\right)=n\times\binom{n}{n}-0\times\binom{n}{0}=n$$

c. On a d'une part :

$$(k+1)\times\binom{n}{k+1}=(k+1)\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}.$$

D'autre part :

$$(n-k)\times\binom{n}{k}=(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!},$$

d'où le résultat.

d. On utilise cette formule :

$$\begin{aligned}B_n&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\times\binom{n}{k}\\&=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n-1}k\times\binom{n}{k}\quad\text{par linéarité de la somme}\\&=n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1\right)-A_n\\&=n(2^n-1)-A_n\quad\text{d'après }\mathbf{Q1a}\end{aligned}$$

e. On a donc montré :

$$\begin{cases}B_n-A_n=n & \text{d'après }\mathbf{Q1b}\\ B_n=n2^n-1-A_n & \text{d'après }\mathbf{Q1d}\end{cases}$$

On déduit rapidement (par exemple par substitution) :

$$A_n=n2^{n-1}-n.$$

Enuite, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n}{k}+n=A_n+n=n2^{n-1}$$

2. **a.** Voir cours.

b. Voir cours.

c. On a

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}i.$$

Calculons la première somme :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}j\right)=\sum_{j=2}^{n}(j-1)j=\sum_{j=2}^{n}(j^2-j)=\sum_{j=1}^{n}j^2-1-(\sum_{j=1}^{n}j-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Mieux vaut mettre au même dénominateur tout de suite (calculs fait rapidement) :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

De même :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n\times\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1))}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

Finalement :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

d. On a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |j-i| = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) \quad \text{car les indices sont muets}$$

Avec la question précédente

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |j-i| = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on définit $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

a. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad C_n(-x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(-kx) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = C_n(x),$$

donc C_n est paire. On a aussi :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad C_n(x+2\pi) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx+2k\pi) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = C_n(x),$$

donc C_n est 2π-périodique.
On a aussi :

$$C_n(0) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

b. Fait en cours, on trouve après calculs :

$$C_n(x) = \frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

c. Notons $D_n : x\mapsto \sum_{k=0}^{n} k\sin(kx)$, alors on a par dérivée d'une somme

$$D_n(x) = C_n'(x),$$

on peut donc dériver le quotient trouvé $x\mapsto \frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$. Le calcul frontal s'annonce pénible, on peut utiliser la formule $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$ avant de dériver :

$$\frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(nx+\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} + \frac{\sin(nx-\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right).$$

Les plus malins peuvent aussi développer et faire apparaître la fonction tan, et ainsi esquiver la dérivée du quotient.

Exercice 4 - Deux équations dans $\mathbb{C}$. Les deux parties sont indépendantes.

1. On souhaite résoudre l'équation : $1-z+z^2-z^3+z^4=0$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

a. Montrer (sans développer) que : $\forall z\in\mathbb{C},\quad (z+1)(1-z+z^2-z^3+z^4) = z^5+1$.

b. Résoudre l'équation $z^5+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

c. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = 0$.

2. **a.** Résoudre l'équation $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ en travaillant sous forme algébrique.

b. Résoudre l'équation sous forme exponentielle.

c. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Correction :

1. **a.** On doit reconnaître $1 - z + z^2 - z^3 + z^4$ comme une somme géométrique de raison $-z$. Ainsi, pour $z \neq -1$, on utilise la formule du cours :

$$1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = \frac{1-(-z)^5}{1-(-z)} = \frac{1+z^5}{1+z},$$

ce qui donne le résultat. Pour $z = -1$, la formule est bien sûr vraie puisque les deux membres de l'égalité sont nuls.

b. On a :

$$z^5 + 1 = 0 \iff z^5 = -1.$$

On déroule le cours : on cherche z sous forme exponenielle $z = \rho e^{i\varphi}$, et on a

$$z^5 = -1 \iff \rho^5 e^{5i\varphi} = e^{i\pi} \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^5 = 1 \\ 5\varphi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \end{array} \right. .$$

Finalement, on trouve comme solutions :

$$\mathcal{S} = \{e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, k = 0, \ldots, 4\}.$$

c. D'après la question **Q1a**, on a

$$z \neq -1 \implies 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = \frac{1+z^5}{1+z},$$

et donc si $z \neq 1$ vérifie $z^5 + 1 = 0$, c'est une solution de l'équation. Ne concluons pas trop vite que les solutions sont données par $\{e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, k = 0, \ldots, 4\}$, car -1 est dans cet ensemble (il correspond à $k = 2$). Il est clair que -1 n'est pas solution. Finalement, les solutions sont données par

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \backslash \{-1\} = \{e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, k = 0, 1, 3, 4\}.$$

2. **a.** On applique la méthode du cours en cherchant les solutons sous la fome $z = x + iy$. On trouve après calculs deux solutions :

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \iff z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

b. On met le second membre sous forme exponentielle :

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \iff z^2 = e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z = \pm e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

c. On déduit par identification, et en utilisant que $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) > 0$:

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 5 - Des calculs de dérivée n-ième. Les deux parties sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{-2x}\sin(2x)$.

a. Ecrire la fonction f sous la forme $\mathrm{Im}(g)$ où la fonction g est une exponentielle complexe.

b. Donner, sans justification, la dérivée n-ième de g.

c. Ecrire $(-2+2i)^n$ sous forme exponentielle.

d. En déduire une expression concise de $f^{(n)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2, -\frac{1}{3}\}$ par $h : x \mapsto \frac{14}{(2x-4)(3x+1)}$.

a. Ecrire la fonction h sous la forme :
$$h : x \mapsto \frac{a}{2x-4} + \frac{b}{3x+1},$$
où a et b seront des réels que vous déterminerez.

b. Proposer une formule pour $h^{(n)}$ (on ne demande pas de prouver le résultat par récurrence).

Correction :

1. **a.** On introduit $g : x \mapsto e^{-2x}e^{2ix} = e^{(-2+2i)x}$, alors on a bien
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(g(x)) = \mathrm{Im}(e^{-2x}e^{2ix}) = e^{-2x}\,\mathrm{Im}(e^{2ix}) = e^{-2x}\sin(2x).$$

b. On a, par récurrence directe :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-2+2i)^n e^{(-2+2i)x}.$$

c. On a (s'aider d'un dessin si besoin) :
$$-2+2i = 2(-1+i) = 2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

d. Par linéarité de la dérivée, on a
$$f^{(n)} = \mathrm{Im}(g^{(n)}),$$
ainsi, on transforme $g^{(n)}$ en vue de prendre sa partie imaginaire : On déduit des questions précédentes :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}})^n e^{(-2+2i)x} = (2\sqrt{2})^n e^{\frac{3in\pi}{4}} e^{(-2+2i)x} = (2\sqrt{2})^n e^{-2x} e^{i(2x+\frac{3n\pi}{4})}.$$
On déduit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (2\sqrt{2})^n e^{-2x}\sin(2x + \frac{3n\pi}{4})$$

2. **a.** On trouve avec la méthode du cours :
$$h : x \mapsto \frac{2}{2x-4} - \frac{3}{3x+1} = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{3x+1}$$

b. Posons $h_1 : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ et $h_2 : x \mapsto \frac{3}{3x+1}$. Après quelques tests (voir cours), on trouve :
$$h_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} \quad \text{et} \quad h_2^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 3^{n+1} n!}{(3x+1)^{n+1}}$$
On déduit $h^{(n)}$ en additionnant.