DST 2
Corrigé

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 8 pages et 4 exercices indépendants.

Exercice 1 - Linéariser pour s'échauffer. On applique la formule d'Euler :

$$(\cos^4 x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4,$$

puis la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(e^{ix}+e^{-ix})^4 &= (e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\\ &= e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\\ &= 2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\end{aligned}$$

Finalement :

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right).$$

On peut alors primitiver, en rappelant que pour un réel $a \neq 0$, on a

$$\int^x \cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\sin(ax).$$

Cela donne

$$\int^x \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x) + 2\sin(2x) + 3x\right).$$

Exercice 2 - Calculs de sommes (4 questions indépendantes).

1. (Somme d'entiers).

a. Voir cours.

b. On montre par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- Initialisation : Vérifions la propriété pour $n = 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1,$$

tandis que

$$\left(\frac{1\times(1+1)}{2}\right)^2 = 1,$$

la propriété est donc vraie au rang 1.

- <u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Etudions-là au rang $n+1$. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On simplifie alors l'expression en factorisant par $(n+1)^2$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

L'hypothèse est donc vraie au rang $n+1$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

On conlut par le principe de récurrence que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On a avec le binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1.$$

d. D'une part, par télescopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5 - 1,$$

D'autre part, avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - k^5 &= \sum_{k=1}^{n} \left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right)\\ &= 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\end{aligned}$$

On déduit, on notant $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$:

$$S_4 = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 1 - S_0\right) - 2S_3 - 2S_2 - S_1,$$

et donc en utilisant les questions précédentes :

$$\begin{aligned}S_4 &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 1 - n\right) - \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - (n+1)\right) - \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\ &= (n+1)\left(\frac{1}{5}((n+1)^4 - 1) - \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(2n+1)}{3} - \frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

Or

$$(n+1)^4 - 1 = ((n+1)^2+1)((n+1)^2-1) = (n^2+2n+2)(n^2+2n),$$

donc on peut encore factoriser S_4 par n :

$$S_4 = n(n+1)\left(\frac{1}{5}(n^2+2n+2)(n+2) - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2}\right).$$

S'arrêter là est amplement suffisant. Bien qu'on ne le voit pas, on peut encore factoriser par $2n+1$. On peut aussi présenter la forme développée :

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

2. (Somme de sinusoïdes).

a. Vu en cours et en TD. On écrit :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ikx}) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k).$$

On calcule cette somme géométrique, de raison e^{ix}, et on utilise la technique de l'angle moitié :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

On récupère la partie imaginaire :

$$S_n(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

On a aussi, de manière directe,

$$S_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \sin(0) = 0.$$

Attention à ne pas utiliser la formule trouvée, qui n'est vraie que pour $x \notin \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, et conduit à une forme indeterminée en 0. Se poser la question du sens de la formule en 0, c'est chercher la limite de S_n en 0, et donc étudier la continuité.

b. Il est clair que pour $x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a $S_n(x) = 0$. Autrement, la fonction S_n est 2π-périodique, et le calcul trouvé ci-dessus s'étend à $\mathbb{R}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a alors

$$\begin{aligned} S_n(x) = 0 &\iff \sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2} = 0 \\ &\iff \frac{nx}{2} \equiv 0 \ \ [\pi] \ \text{ ou } \ \frac{(n+1)x}{2} \equiv 0 \ \ [\pi] \\ &\iff x \equiv 0 \ \ [\frac{2\pi}{n}] \ \text{ ou } \ x \equiv 0 \ \ [\frac{2\pi}{(n+1)}] \end{aligned}$$

Finalement, si on note $\mathcal{S}_1 = \{\frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{\frac{2k\pi}{(n+1)}, k \in \mathbb{Z}\}$, alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Combien de ces solutions sont dans l'intervalle $]0, 2\pi[$? On a pour un entier k :

$$\frac{2k\pi}{n} \in]0, 2\pi[\iff 0 < k < n \quad \text{et} \quad \frac{2k\pi}{(n+1)} \in]0, 2\pi[\iff 0 < k < (n+1).$$

Finalement, en notant $\mathcal{S}_1' = \mathcal{S}_1 \cap]0, 2\pi[$ et $\mathcal{S}_2' = \mathcal{S}_2 \cap]0, 2\pi[$, ces deux ensembles ont respectivement $n-1$ et n éléments. Attention, n'en déduisons pas trop vite qu'il y a $2n-1$ points d'annulation dans $]0, 2\pi[$, car ces deux ensembles pourraient ne pas être disjoints : rappelez-vous la formule

$$\mathrm{Card}(\mathcal{S}_1' \cup \mathcal{S}_1') = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_1') + \mathrm{Card}(\mathcal{S}_2') - \mathrm{Card}(\mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2').$$

Vérifions cependant qu'il n'y a pas d'élément commun à ces deux ensembles. Soit $x \in \mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2'$, c'est-à-dire que

$$x = \frac{2k_1\pi}{n} = \frac{2k_2\pi}{n+1}, \quad \text{avec } \ 0 < k_1 < n \ \text{ et } 0 < k_2 < n+1.$$

On aurait alors

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n}{n+1}.$$

Autrement dit, la fraction $\frac{n}{n+1}$ serait réductible. Ceci est faux, en effet, soit d un diviseur commun à n et $n+1$, alors d divise $n+1-n = 1$, et donc $d = 1$. Ainsi, il ne peut exister de tels entiers k_1 et k_2. Finalement, on a bien $\mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2' = \varnothing$ et donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{S}_1' \cup \mathcal{S}_1') = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_1') + \mathrm{Card}(\mathcal{S}_2') = 2n-1$$

3. On veut étudier pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

a. On a

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2^3} = \frac{9}{8} \quad \text{et} \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} = s_2 + \frac{1}{27} = \frac{10}{216} = \frac{251}{216}.$$

b. On a
$$\forall k \geqslant 3, \quad \begin{cases} k-1<k \\ k-2<k \end{cases}, \quad \text{et} \quad \text{par produit} \quad k(k-1)(k-2)<k^3$$
puis par passage à l'inverse de quantité positives, on obtient le résultat demandé.

c. En attendant des méthodes plus performantes, raisonnons par analyse et mettons au même dénominateur :
$$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{a}{k-2}+\frac{b}{k-1}+\frac{c}{k}=\frac{ak(k-1)+bk(k-2)+c(k-1)(k-2)}{k(k-1)(k-2)}=\frac{(a+b+c)k^2+(-a-2b-3c)k+2c}{k(k-1)(k-2)}.$$
Ainsi, par idenfication des coefficients de deux polynômes :
$$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{a}{k-2}+\frac{b}{k-1}+\frac{c}{k}=\frac{1}{k(k-1)(k-2)} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a-2b-3c=0 \\ 2c=1 \end{cases}.$$
On obtient directement $c=\frac{1}{2}$, et on doit résoudre le système
$$\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2} \\ -a-2b=\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}.$$
Finalement,
$$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{1/2}{k-2}-\frac{1}{k-1}+\frac{1/2}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{2}{k-1}+\frac{1}{k}\right)$$

d. On utilise la question précédente :
$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}-\frac{2}{k-1}+\frac{1}{k}\right).$$
On pressent un télescopage. Si on ne le voit pas directement, on peut toujours séparer en trois sommes, et changer les indices pour se ramener aux mêmes termes, autrement dit reprendre la preuve du télescopage. On peut aussi "distribuer" le terme central $\frac{2}{k-1}$ aux autres termes :
$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1})+(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1})\right).$$
On voit bien deux sommes télescopiques :
$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n-1)}$$

e. On a, en utilisant la majoration de la question **Q3b** :
$$s_n=s_2+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant s_2+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{9}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n-1)}<\frac{9}{8}+\frac{1}{4}=\frac{11}{8}.$$
Ainsi, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Elle est clairement croissante, puisque $s_{n+1}-s_n=\frac{1}{(n+1)^3}>0$. Donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge.
Pour aller plus loin : sa limite, appelée "constante d'Apéry", et un nombre mystérieux dont on sait peut de chose.

4. Sommes en vrac (questions indépendantes)

a. C'est une somme à "double indice", que l'on écrit comme une somme double :
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)=\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)}{2}+n)=\frac{n(n+3)}{4}$$

b. On effectue le changement d'indice $j=2n+1-k$ (et donc $k=2n+1-j$) dans S_n :
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{j=2n+1}^{n+1}\binom{2n+1}{2n+1-j}=\sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-j}.$$

Or on a la propriété de symétrie :

$$\forall j \in [\![0\,,2n+1]\!]\,,\quad \binom{2n+1}{2n+1-j} = \binom{2n+1}{j}.$$

On déduit que

$$S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \text{ puisque l'indice est muet}$$

Finalement,

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

On conclut avec le binôme de Newton :

$$2S_n = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad S_n = 2^{2n} = 4^n$$

Exercice 3 - Complexes et géométrie (3 questions indépendantes).

1. Introduisons les deux points $A = (-3,-1)$ et $B = (1,-5)$, ainsi que les affixes associées $a = -3-i$ et $b = 1-5i$, de sorte que

$$q(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

Notons M le point d'affixe z.

a. On a

$$|q(z)| = 1 \iff |\frac{z-a}{z-b}| = 1 \iff \frac{AM}{BM} = 1 \iff AM = BM.$$

Ainsi, les points recherchés forment la médiatrice du segment $[AB]$.

b. On a

$$q(z) \in \mathbb{R} \iff \arg(q(z)) \equiv 0 \ \ [\pi] \iff (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv 0 \ \ [\pi].$$

Ainsi, les points recherchés sont exactement les points tels que A, B et M sont alignés, il s'agit de la droite (AB) (privée du point B pour lequel la condition n'a pas de sens).

c. On a

$$q(z) \in i\mathbb{R} \iff \arg(q(z)) \equiv \frac{\pi}{2} \ \ [\pi] \iff (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2} \ \ [\pi] \equiv \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}.$$

Ainsi, les points recherchés sont exactement les points tels que A, B et M forment un triangle rectangle en M. Il s'agit du cercle de diamètre $[AB]$.

2. **a.** On écrit z et z' sous forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad z' = r'e^{i\theta'}, \quad \text{avec } r > 0 \ \text{ et } \ r' > 0.$$

On a alors

$$z\overline{z'} = re^{i\theta} \times r'e^{-i\theta'} = rr'e^{i(\theta-\theta')}.$$

On déduit

$$\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = rr'\cos(\theta-\theta') = |z||z'|\cos(\theta-\theta').$$

b. On a

$$\begin{aligned} |z+z'| = |z-z'| &\iff |z+z'|^2 = |z-z'|^2 \\ &\iff (z+z') \times \overline{(z+z')} = (z-z') \times \overline{(z-z')} \\ &\iff |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 = |z|^2 - z\overline{z'} - z'\overline{z} + |z'|^2 \\ &\iff (z\overline{z'} + z'\overline{z}) = 0 \\ &\iff z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} = 0 \\ &\iff \mathrm{Re}(z\overline{z'}) = 0 \\ &\iff \cos(\theta-\theta') = 0 \ \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

On résout cette équation :

$$\cos(\theta-\theta') = 0 \iff \theta - \theta' \equiv \frac{\pi}{2} \ \ [\pi] \iff \theta = \theta' + \frac{\pi}{2} \ \ [\pi].$$

Traduisons géométriquement ce critère. Soient M et M' d'affixe z et z'. Soit également M'', d'affixe $-z'$, c'est le symétrique de M' par rapport à l'origine. Alors, on a

$$|z+z'| = |z-z'| \iff MM' = MM'',$$

ce qui équivaut à dire que M est sur la médiatrice de $[M'M'']$ (qui coupe $[M'M'']$ en son milieu, à savoir l'origine).

Or, un point M est sur cette médiatrice si et seulement si $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, ce qui se traduit bien par

$$\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta' + \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

3. **a.** On rappelle qu'étant donnés deux points M et N d'affixes z et z', le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z'-z$. Ainsi, on a

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff a - z + b - z + c - z = 0 \iff z = \frac{a+b+c}{3}.$$

b. On rappelle qu'un triangle équilatéral MNP est dit *direct* lorsque les trois points “tournent” dans le sens direct, c'est-à-dire quand

$$(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{3}.$$

Montrer qu'un triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si

$$\begin{cases} (\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}) = \frac{\pi}{3} \\ NP = NM \end{cases}$$

Or on a

$$|\frac{m-n}{p-n}| = \frac{NP}{NM} \quad \text{et} \quad \arg(\frac{m-n}{p-n}) = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi, le module et l'argument de $\frac{m-n}{p-n}$ sont connus. On déduit

$$\frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

c. On a

$$-j^2 = -(e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

On exploite alors la question précédente : un triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}} \iff m - n = e^{\frac{i\pi}{3}}(p-n)$$
$$m + n(-1-j^2) + j^2 p = 0$$

Or on a vérifie facilement que $-1-j^2 = j$ (d'ailleurs il est conseillé de savoir que $1+j+j^2=0$), d'où le critère : un triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si $m + jn + j^2 p = 0$.

d. Posons $r = -2 - i\sqrt{3}$ et $s = 4 + i$. On applique le critère précédent pour déterminer les coordonnées du point M (ou, ce qui revient au même, on utilise la question **Q3b**.

e. Classique, voir “théorème de Napoléon” (preuves par les complexes), sur internet.

f. Classique, voir “théorème de Napoléon” (preuves par les complexes), sur internet.

Exercice 4 - Complexes et équations (4 questions indépendantes).

1. **a.** On calcule le discriminant :

$$\Delta = (i+3)^2 - 4 \times i \times (2-2i) = -2i.$$

On cherche les racines carrées de Δ. Le plus efficace est de mettre sous forme exponentielle :

$$\Delta = -2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}},$$

et donc Δ a pour racines

$$\delta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \quad \text{et} \quad -\delta = -1 + i.$$

On déduit les solutions de l'équations :

$$z_1 = \frac{-i-3-\delta}{2i} = 2i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-i-3-\delta}{2i} = -1 + i.$$

b. On pose $X = z^2$, l'équation devient alors $iX^2 + (i+3)X + 2 - 2i = 0$, dinconnue $X \in \mathbb{C}$. On utilise la question précédente les solutions sont :

$$X = 2i \quad \text{et} \quad X = -1 + i$$

On doit résoudre les deux équations

$$z^2 = 2i \quad \text{et} \quad z^2 = -1 + i.$$

Ces deux équations se résolvent facilement grâce à la forme exponentielle, en effet

$$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2^{1/4}e^{\frac{3i\pi}{8}}, -2^{1/4}e^{\frac{3i\pi}{8}}\}$$

2. Commençons par chercher le module d'une solution. On prend le module de l'équation :

$$|z^6|z|| = |z^6||z| = |z|^7 = 1 \iff |z| = 1 \quad \text{car} \quad |z| \geqslant 0.$$

Ainsi, on a

$$z^6|z| = 1 \implies z^6 = 1.$$

On connait les solutions de cette équations : ce sont les racines sixièmes de l'unité :

$$\{e^{\frac{2ik\pi}{6}}, k = 0, \ldots, 5\} = \{e^{\frac{ik\pi}{3}}, k = 0, \ldots, 5\}.$$

Réciproquement, il est clair que chacun de ces 6 nombres vérifient l'équation.

3. **a.** On a

$$u = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Notez que sans reconnaître les formes exponentielles, mais utiliser la technique du conjugué, conduisait au même résultat.

b. On utilise la question précédente :

$$z^5 = u \iff z^5 = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

On connait une solution évidente : $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{3\times 5}} = e^{\frac{2i\pi}{15}}$. Les autres solutions se déduisent en écrivant

$$z^5 = z_0^5 \iff (\frac{z}{z_0})^5 = 1 \iff \frac{z}{z_0} \text{ est une racine cinquième de l'unité } \iff \frac{z}{z_0} \in \{e^{\frac{2ik\pi}{5}}\}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{e^{i(\frac{2\pi}{15} + \frac{2ik\pi}{5})}, k = 0, \ldots, 4\} = \{e^{\frac{2i\pi}{15}}, e^{\frac{8i\pi}{15}}, e^{\frac{14i\pi}{15}}, e^{\frac{20i\pi}{15}}, e^{\frac{26i\pi}{15}}\}.$$

4. (Racines 4-ième, mais sous forme algébrique !)

a. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $\omega^2 = 4(7 - 24i)$. En l'absence de forme exponentielle apparente, on se dirige vers la forme algébrique en cherchant ω sous la forme $a + ib$. On a alors $w^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. Ainsi :

$$w^2 = 4(7 - 24i) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 28 \\ 2ab = -96 \end{cases}.$$

On a de plus $|w^2| = a^2 + b^2 = |4(7 - 24i)| = 4|7 - 24i| = 4\sqrt{49 + 24^2} = 4\sqrt{625} = 4 \times 25 = 100$. Des deux équations sur a^2 et b^2 on déduit

$$a^2 = 64 \ \text{ et } \ b^2 = 36 \iff a = \pm 8 \quad \text{et} \quad b = \pm 6.$$

L'équation $2ab = -96$ indique que a et b sont de signe opposés, les deux solutions de l'équation sont donc

$$w = 8 - 6i \ \text{ et } \ w = -8 + 6i.$$

b. Les racines quatrième de $4(7-24i)$ sont les solutions de

$$\Omega^4 = (\Omega^2)^2 = 4(7-24i),$$

en particulier, Ω^2 est une racine carrée de $4(7-24i)$. On doit donc résoudre

$$\Omega^2 = 8-6i \quad \text{et} \quad \Omega^2 = -8+6i.$$

On répète la méthode ci-dessus. On peut se contenter de trouver une seule solution par exemple $\Omega_0 = 1+3i$, et les autres solutions se déduisent par multiplication par les racines quatrième de l'unité, à savoir $\{1, i, -1, -i\}$. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{1+3i, -3+i, -1-3i, 3-i\}.$$