# DST 3

*Aucun document n'est autorisé.*

*L'usage de toute calculatrice est interdit.*

**Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.**

**Ce sujet comporte 2 pages et 5 exercices indépendants.**

---

### Exercice 1 - (In)égalités.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x| + |x+1|$ est minorée, et qu'elle admet un minimum global, que l'on précisera. La tracer.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ l'inéquation $\frac{4e^x-3}{e^x-1} \leqslant -2$.
3. Résoudre l'équation $2\ln x + \ln(x+1) = \ln(2x)$ (on précisera d'abord le domaine de validité du problème).
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4^x - 2^x \geqslant 6$.

### Exercice 2 - Une relation entre des fonctions circulaires réciproques.

1. Questions de cours sur la fonction Arcsin.
   - **a.** Rappeler la définition de la fonction Arcsin, en précisant avec soin son ensemble de définition.
   - **b.** Préciser là où elle est dérivable, et donner sa dérivée.
   - **c.** La tracer.
   - **d.** Donner, sans justification, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction $u : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ (on commencera par préciser son ensemble de définition). En déduire l'ensemble de définition de la fonction
$$f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x}).$$
3. Démontrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que
$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$
4. En déduire que
$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x}) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}.$$
5. On se propose de retrouver le résultat de la question **Q4** avec des formules de trigonométrie.
   - **a.** Exprimer $\cos^2$ en fonction de $\tan^2$, et en déduire une simplification, pour $a \in \mathbb{R}$, de $\cos^2(\operatorname{Arctan}(a))$.
   - **b.** Déduire de la question précédente que
$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \cos(2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}) = \frac{1-x}{1+x}.$$
   - **c.** Retrouver le résultat de la question **Q4**.

**Exercice 3 - Etude d'une bijection.** On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

1. Donner l'ensemble de définition le plus grand possible pour la fonction $f$.
2. Etudier la parité de $f$.
3. Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-1,1[$.
4. Montrer que la fonction $f$ réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un ensemble à préciser.
5. Soit $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in ]-1,1[$.
6. En déduire que la fonction $\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$ est la fonction réciproque de $f$.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$-6\,\mathrm{th}^2(x) + \mathrm{th}(x) + 1 \geqslant 0.$$
On pourra utiliser les questions précédentes.

**Exercice 4 - Des suites.** Les questions suivantes sont indépendantes

1. Soit la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n} - 1.$$
En revenant à la définition, montrer que cette suite tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit la suite définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \\ u_0 = 6 \end{cases}.$$
   **a.** Donner une expression explicite du terme général $u_n$ en fonction de $n$.
   **b.** Donner la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ainsi que sa limite.
   **c.** Calculer, pour $N \in \mathbb{N}$, la somme $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$, ainsi que la limite de $(S_N)_{N\geqslant 0}$ lorsque $N \to +\infty$.
3. Soit la suite définie par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
   **a.** Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
   **b.** En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, puis qu'elle converge.
   **c.** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   **d.** En utilisant que $e > 2$, déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$
   **e.** Montrer que
$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant u_N \times (\frac{1}{2})^{n-N}.$$
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

**Exercice 5 - Divers : Equations, logique, fonctions et ensembles.** Les questions suivantes sont indépendantes

1. Soit $\alpha = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3}$. Calculer $\tan\alpha$, puis en déduire la valeur de $\alpha$.
2. Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles tels que
$$A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C.$$
Montrer que $B \subset C$.
3. Soient $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $f(p,q) = p^2 - q^2$.
   **a.** Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, c'est-à-dire les antécédants de 0 par $f$.
   **b.** L'application est-elle injective ?
   **c.** Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $f(p,q) = 2$. Montrer que $p+q$ et $p-q$ divisent 2.
   **d.** Déduire de la question précédente une contradiction. Que déduire de la fonction $f$ ?