DST 3

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une étude de fonction et une équation. Les deux parties sont indépendantes.

1. On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\frac{2x}{1+x^2})$.

- **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction $h : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de plus dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
- **c.** Etudier la parité de f.
- **d.** **(i)** Déterminer une expression de f' sur $]1, +\infty[$.
  - **(ii)** En déduire : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \pi - 2\,\text{Arctan}(x)$.
  - **(iii)** Esquisser le graphe de f sur $[1, +\infty[$.
  - **(iv)** Montrer que la fonction f définit une bijection de $[1, +\infty[$ sur un ensemble à préciser, et donner sa bijection réciproque.

2. On se propose de résoudre l'équation suivante sur $[1, +\infty[$:

$$(E) \qquad \text{Arccos}(\frac{15}{26x}) = \pi - 2\,\text{Arctan}(x).$$

- **a.** Montrer que si x est solution sur $[1, +\infty[$ de (E), alors x est solution de
$$\frac{15}{26x} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$
- **b.** En déduire que si x est solution sur $[1, +\infty[$ de (E), alors x est solution de
$$(2x-3)(13x^2+12x+5) = 0.$$
- **c.** Justifier que la fonction $g : x \mapsto \text{Arccos}(\frac{15}{26x}) - \pi + 2\,\text{Arctan}(x)$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (on pourrait s'abstenir de tout calcul pour le justifier).
- **d.** Justifier que $g(1) < 0$.
- **e.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
- **f.** Conclure

Correction :

1. Notons h cette fonction. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(-x) = \frac{2\times(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -h(x),$$

donc la fonction est impaire.

Pour déterminer les variations, on calcule sa dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{2 \times (1+x^2) - 2x \times (2x)}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Le dénominateur étant positif, la dérivée est du signe de $1 - x^2$. Or

$$1 - x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

On a également

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.$$

On peut tracer le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1,$$

et comme Arcsin est définie sur $[-1, 1]$, la fonction f est bien définie par composée.
En outre, puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}, \quad -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1,$$

et que Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ par composée.
Notez que la dérivabilité ou la non dérivabilité de f en -1 et 1 n'est pas demandée, et ne pas être prouvée facilement à ce stade de l'année.

3. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(-x) = \operatorname{Arcsin}(h(-x)) &= \operatorname{Arcsin}(-h(x)) \quad \text{car } \ h \text{ impaire}\\ &= -\operatorname{Arcsin}(h(x)) \quad \text{car } \ \operatorname{Arcsin} \text{ impaire}\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

Donc f est impaire.

4. **a.** On utilise la formule

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)}{\sqrt{1-h(x)^2}} = \frac{2 \times \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{x^4-2x^2+1}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-1)^2}}\\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|x^2-1|}\end{aligned}$$

Si $x \in]1, +\infty[$, on a $x^2 - 1 > 0$, et donc

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(x^2-1)} = -\frac{2}{1+x^2}$$

b. On a :

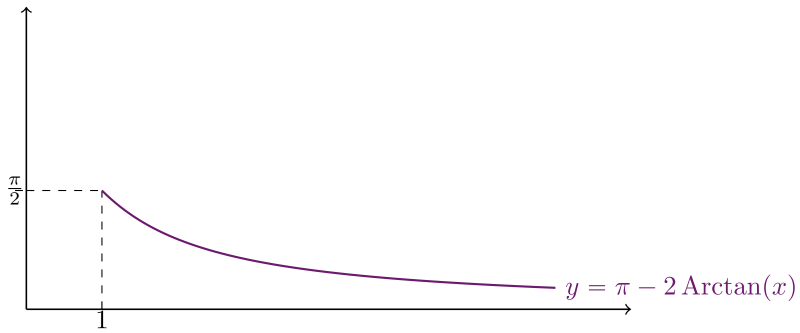
$$\forall x > 1, \ f(x) = \int^x f'(t)\,\mathrm{d}t = -2\operatorname{Arctan}(x) + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \ \text{ une constante.}$$

Pour évaluer C, il n'est pas évident de prendre une valeur particulière de f dans $]1, +\infty[$. Il vaut mieux considérer la limite $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \operatorname{Arcsin}(X) = \operatorname{Arcsin}(0) = 0,$$

d'autre part
$$\lim_{x\to+\infty}(-2\operatorname{Arctan}(x)+C) = -\pi + C,$$
d'où par identification, $C = \pi$, d'où
$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \pi - 2\operatorname{Arctan}(x).$$
Cette formule est clairement vraie en $x = 1$, puisque $f(1) = \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$, et $\pi - 2\operatorname{Arctan}(1) = \pi - 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

c. En théorie, on applique à Arctan une dilatation selon l'axe (Oy) puis une symétrie d'axe (Ox), et enfin une translation de π selon (Oy). En pratique, on peut se contenter d'esquisser l'allure à partir de la monotonie et des valeurs au bord.



d. Avec l'expression $f(x) = \pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$, il semble clair que f soit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ (faire le tableau de variation de f pour le voir). Montrons-le, en obtenant au passage la fonction réciproque.
Soit $y \in]0,\frac{\pi}{2}]$, on résout $y = f(x)$, d'inconnue $x \in [1,+\infty[$:
$$y = f(x) \iff y = \pi - 2\operatorname{Arctan}(x) \iff \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi - y}{2} \implies x = \tan(\frac{\pi - y}{2}).$$
Il faut démontrer que la dernière implication est une équivalence. Or on a :
$$0 < y \leqslant \frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi - y}{2} < \frac{\pi}{2},$$
et donc $x = \tan(\frac{\pi-y}{2}) \implies \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi-y}{2}$.
Cela prouve que f est bijective, et que $f^{-1} :]0,\frac{\pi}{2}] \to [1,+\infty[$ est définie par $f^{-1} : x \mapsto \tan(\frac{\pi-y}{2})$.
Remarque : On aurait aussi pu commencer par appliquer le théorème de la biection à f. Dans ce cas-là, pas besoin de montrer que la dernière implication est une équivalence, car on sait que l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution, qui est nécessairement $x = \tan(\frac{\pi-y}{2})$ d'après l'implication.

5. **a.** On applique la fonction cosinus à l'équation
$$\cos(\operatorname{Arccos}(\frac{15}{26x})) = \cos(\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)) \iff \frac{15}{26x} = -\cos(2\operatorname{Arctan}(x)) \quad \text{car} \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta).$$
Il reste à calculer $\cos(2\operatorname{Arctan}(x))$, on a d'abord une formule de duplication :
$$\cos(2\operatorname{Arctan}(x)) = 2\cos(\operatorname{Arctan}(x))^2 - 1.$$
Comment calculer $\cos(\operatorname{Arctan}(x))$? Si on n'a pas d'idée, on peut écrire $x = \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{\sin(\operatorname{Arctan}(x))}{\cos(\operatorname{Arctan}(x))}$, exprimer sin selon cos avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$, et isoler le cosinus. C'est un peu fastidieux, et il y a plus court : on remarque qu'on peut lier cos et tan par
$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2,$$
ainsi,
$$\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+\tan(\operatorname{Arctan}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$
On déduit de tout cela que si x est solution, alors
$$\cos(\operatorname{Arccos}(\frac{15}{26x})) = -\cos(2\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - 2\cos(\operatorname{Arctan}(x))^2 = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

b. Direct avec un produit en croix et une factorisation.

c. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\frac{15}{26x})$ est strictement croissante comme composée de deux fonctions strictement décroissantes. Puisque Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction g est strictement croissante comme somme de fonctions stricement croissantes.

d. On a $g(1) = \operatorname{Arccos}(\frac{15}{26}) - \pi + 2\operatorname{Arctan}(1) = \operatorname{Arccos}(\frac{15}{26}) - \frac{\pi}{2}$. Or, comme Arccos est décroissante, on a $\operatorname{Arccos}(\frac{15}{26}) < \operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$, et donc $g(1) > 0$.

e. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \operatorname{Arccos}(0) - \pi + 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

f. Comme la fonction est strictement croissante, elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image qui vaut $[g(1), \frac{\pi}{2}[$, par continuité de g et d'après le corollaire du TVI. Comme $g(1) < 0$, on a $0 \in [g(1), \frac{\pi}{2}[$, et donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$. Or, si x est solution, on a vu que nécessaiement,

$$(2x - 3)(13x^2 + 12x + 5) = 0.$$

Comme le trinôme $13x^2 + 12x + 5$ n'a pas de racine réelle, nécessairement $2x - 3 = 0$, et donc $x = \frac{3}{2}$.
En conclusion, l'équation (E) a une unique solution : $x = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 - Sommes et arctangentes.

1. **a.** Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \text{Arctan}(\frac{k}{k+1}) - \text{Arctan}(\frac{k-1}{k}) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

b. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \text{Arctan}(\frac{k}{k+1}) - \text{Arctan}(\frac{k-1}{k}) = \text{Arctan}(\frac{1}{2k^2})$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{1}{2k^2})$. Déduire de la question précédente une expression simple de S_n.

d. Montrer que (S_n) admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a. Montrer que la suite (T_n) est strictement croissante.

b. Montrer : $\forall x \in [0, \frac{1}{2}],\quad \frac{4}{5}x \leqslant \text{Arctan}(x)$.

c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n \leqslant \frac{5}{2} S_n.$$

d. Montrer que la suite (T_n) converge, et proposer une majoration aussi précise que possible de sa limite.

Correction :

1. **a.** Posons $\alpha_k = \text{Arctan}(\frac{k}{k+1}) - \text{Arctan}(\frac{k-1}{k})$. On peut être assez direct : puisque $0 < \frac{k}{k+1} < 1$ et $0 < \frac{k-1}{k} < 1$, on a

$$0 < \text{Arctan}(\frac{k}{k+1}) < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 0 < \text{Arctan}(\frac{k-1}{k}) < \frac{\pi}{4}$$

On déduit :

$$-\frac{\pi}{4} < \alpha_k < \frac{\pi}{4}.$$

b. D'après la question précédente, on a $\alpha_k \not\equiv \frac{\pi}{2}\ \ [\pi]$, on peut alors calculer sa tangente :

$$\tan(\alpha_k) = \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k}} = \frac{\frac{k^2-(k-1)(k+1)}{k(k+1)}}{1 + \frac{k-1}{k+1}} = \frac{\frac{1}{k(k+1)}}{\frac{2k}{k+1}} = \frac{1}{2k^2}$$

Ne surtout pas conclure tout de suite, il fait localiser α_k pour revevenir en arrière. Or d'après la question précédente, on a $\alpha_k \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et donc on a

$$\alpha_k = \text{Arctan}(\tan(\alpha_k)) = \text{Arctan}(\frac{1}{2k^2}).$$

c. On a d'après la question précédente :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{k}{k+1}) - \text{Arctan}(\frac{k-1}{k}).$$

On reconnait une somme télescopique, et donc :

$$S_n = \text{Arctan}(\frac{n}{n+1}) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(\frac{n}{n+1}).$$

d. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

et donc par composition, comme Arctan est une fonction continue :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \text{Arctan}(\frac{n}{n+1}) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a. On a $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite est croissante.

b. Posons $D : x \mapsto \text{Arctan}(x) \geqslant \frac{4}{5}x$, et étudions cette fonction. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{4}{5}.$$

En particulier :

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant \frac{5}{4} \implies \frac{4}{5} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 \implies 0 \leqslant D'(x).$$

On déduit que D est croissant sur $[0, \frac{1}{2}]$, et donc puisque $D(0) = 0$, alors

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}], \quad D(x) \geqslant 0 \iff \text{Arctan}(x) \geqslant \frac{4}{5}x.$$

c. La minoration s'applique-t-elle aux termes de la somme ? On a :

$$k \in \mathbb{N}^* \implies 0 \leqslant \frac{1}{2k^2} \leqslant \frac{1}{2},$$

et donc d'après la question précédente :

$$\text{Arctan}(\frac{1}{2k^2}) \geqslant \frac{4}{5} \times \frac{1}{2k^2},$$

Puis en sommant :

$$S_n \geqslant \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} = \frac{2}{5} T_n,$$

d'où le résultat :

$$T_n \leqslant \frac{5}{2} S_n.$$

d. Déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n \leqslant \frac{5}{2} S_n \leqslant \frac{5}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{8}.$$

Ainsi, la suite (T_n) est majorée, comme elle est croissante d'après la question **Q2a**, elle converge vers une limite L. On a de plus :

$$L \leqslant \frac{5\pi}{8}.$$

Exercice 3 - Exercices en vrac.

1. Résoudre : $16^x > 4^x + 6$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On notera que $4^2 = 16$.
2. Soit la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ et $u_0 = 3$.
   - **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3$.
   - **b.** Montrer : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
   - **c.** Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) lorsque $n \to +\infty$.
3. Soit la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$. Déterminer sa limite lorsque $n \to +\infty$.
4. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers qui converge vers un entier $\ell \in \mathbb{N}$.
   - **a.** Ecrire la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, et l'appliquer avec $\epsilon = \frac{1}{2}$.
   - **b.** Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constant à partir d'un certain rang.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.
   - **a.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$
   - **b.** Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$

Correction :

1. L'inconnue $X = 4^x$ vérifie l'inéquation
$$X^2 > X + 6 \iff X^2 - X - 6 > 0.$$
Or le trinôme $X^2 - X - 6$ a pour racines -2 et 3. Ainsi, on a
$$X^2 - X - 6 > 0 \iff X < -2 \text{ ou } X > 3.$$
On a donc
$$16^x > 4^x - 6 \iff 4^x < -2 \text{ ou } 4^x > 3.$$
Mais $4^x > 0$, donc la première inéquation n'a pas de solution, et
$$16^x > 4^x - 6 \iff 4^x > 3 \iff x\ln(4) > \ln(3) \iff x > \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

2. **a.** Preuve par récurrence, assez facile.

b. On a
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 2.$$
Or le polynôme $X^2 - X - 2$ a pour racines -1 et 2. Mais d'après la question précédente, $u_n \geqslant 3$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, et la suite (u_n) est croissante.

c. La suite est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, ou bien la suite est majorée, et alors elle converge vers $\ell \in]3, +\infty[$, ou bien elle diverge vers $+\infty$. Supposons que ce soit le premier cas qui soit vrai, alors ℓ vérifie l'équation du point fixe
$$\ell = \ell^2 - 2 \iff \ell = -1 \text{ ou } \ell = 2.$$
Mais $\ell > 3$, c'est donc absurde. Donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Vu en cours (mais avec +).

4. **a.** Par définition de la limite :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \epsilon.$$
En particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}$:
$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \epsilon \iff \ell - \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{1}{2}.$$

b. Donc à partir du rang N, on a $u_n \in [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$. Or le seul entier dans l'intervalle $[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$ est ℓ lui-même, donc puisque u_n est un entier, on obtient :
$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \ell$$
autrement dit : la suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.

a. Simplifier $k\binom{n}{k}$, utiliser un glissement et conclure avec le binôme de Newton.

b. Classique, vu en cours/TD. On somme d'abord sur i car on sait calculer $\sum i$.
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{(j-1)j}{2} = \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{(n-1)n}{4}.$$

Exercice 4 - Etude d'une fonction complexe.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par
$$f : z \mapsto \overline{z} - |z|.$$

1. La fonction f est-elle injective ?

2. La fonction f est-elle surjective ? On admettra (c'est facile à obtenir) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, l'image réciproque de $\{0\}$.

4. Soit $A = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \text{ et } \operatorname{Re}(z) \geqslant 0\}$. Déterminer $f(A)$, l'image directe de A par la fonction f. Tracer les ensembles A et $f(A)$ dans la plan complexe, en utilisant deux couleurs différentes.

Correction :

1. On teste quelques valeurs, en particulier, si $z \in \mathbb{R}_+$ est réel : $f(z) = \overline{z} - |z| = z - z = 0$. Par exemple, $f(1) = f(2) = 0$. Cela prouve que f n'est pas injective.

2. Soit $c = a + ib \in \mathbb{C}$, cherchons ses antécédants possibles sous la forme $z = x + iy$ en résolvant :

$$c = f(z) \iff a + ib = x - iy - \sqrt{x^2 + y^2} \iff \begin{cases} x - \sqrt{x^2 + y^2} = a \\ -y = b \end{cases}.$$

La deuxième équation a toujours une solution, $y = -b$, mais puisque $x - \sqrt{x^2 + y^2} < 0$ d'après l'indication, la première n'a pas de solution si $a > 0$. Par exemple, $c = 1$ n'a pas d'antécédant par f. Cela prouve que f n'est pas surjective.

Remarque : L'inégalité cachée est bien sûr que $\operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$, une propriété du cours sur les complexes.

3. Pour déterminer $f^{-1}(\{0\})$, on résout $f(z) = 0$:

$$f(z) = 0 \iff \overline{z} = |z|.$$

Mieux vaut ne pas y aller frontalement. On a alors $\overline{z} \in \mathbb{R}_+$, et donc $z = \overline{z}$, et donc $z \in \mathbb{R}_+$. Or on a déjà vu (ou bien on le découvre maintenant) à la question **Q1** que $z \in \mathbb{R}_+$ est solution. On conclut :

$$f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}_+.$$

4. Notons que $z \in A$ si et seulement si il existe $x \geqslant 0$ tel que $z = x + ix$. Ainsi,

$$f(A) = \{c \in \mathbb{C} | \exists z \in A \text{ avec } c = f(z)\} = \{c \in \mathbb{C} | \exists x \geqslant 0 \text{ avec } c = x - ix - |x + ix|\}$$

Or pour $x \geqslant 0$, on a $|x - ix| = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x| = \sqrt{2}x$. Soit $A = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \text{ et } \operatorname{Re}(z) \geqslant 0\}$. Ainsi,

$$f(A) = \{x - \sqrt{2}x - ix, x \geqslant 0\} = \{x(1 - \sqrt{2}) - ix, x \geqslant 0\}.$$

Quel est cet ensemble ? On a

$$c \in f(A) \iff \operatorname{Re}(c) = \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Im}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\operatorname{Re}(c) = (\sqrt{2} + 1)\operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c) \leqslant 0 \end{cases}$$

C'est tout simplement la portion de droite d'équation $y = (\sqrt{2} + 1)x$ situté dans le demi-plan inférieur $y \leqslant 0$.