DST 3
Corrigé

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

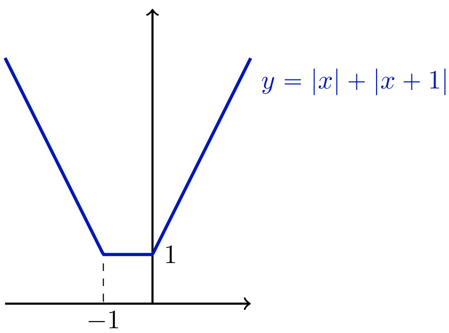
Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - (In)égalités.

1. Il est clair que la fonction est minorée par 0. Commençons par simplifier la fonction en enlevant les valeurs absolues, selon les signes de x et $x+1$:

- Sur $]-\infty,-1]$, on a $x+1 \leqslant 0$ et $x \leqslant 0$, ainsi
$$f(x) = -x-(x+1) = -2x-1.$$
- Sur $[-1,0]$, on a $x+1 \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, ainsi
$$f(x) = -x+(x+1) = 1.$$
- Si $[0,+\infty[$, on a $x+1 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, ainsi
$$f(x) = x+(x+1) = 2x+1.$$

Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, constante (égale à 1) sur $[-1,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle est donc minorée par 1, qui est son minimum global.



2. Le plus efficace est de chercher le signe d'une fraction :
$$\frac{4e^x-3}{e^x-1} \leqslant -2 \iff \frac{4e^x-3}{e^x-1}+2 \leqslant 0 \iff \frac{4e^x-3+2(e^x-1)}{e^x-1} \leqslant 0 \iff \frac{6e^x-5}{e^x-1} \leqslant 0.$$

Or $6e^x-5 \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln\frac{5}{6}$ et $e^x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$. On réunit ces informations dans un tableau de signe en notant que, puisque $\frac{5}{6} < 1$, on a $\ln\frac{5}{6} < 0$:

x	$-\infty$		$\ln \frac{5}{6}$		0		$+\infty$
$6e^x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{6e^x-5}{e^x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Finalement, on a

$$\frac{4e^x - 3}{e^x - 1} \leqslant -2 \iff x \in [\ln \frac{5}{6}, 0[.$$

Remarque : Poser $X = e^x$ peut fonctionner, mais est risqué car il faudra revenir à l'inconnue d'origine. De même, on aurait pu "passer" le dénominateur $e^x - 1$ dans le membre de droite en multipliant, mais il faut changer le sens de l'inégalité selon le signe de cette expression.

3. L'équation a un sens lorsque

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \iff x > 0.$$

C'est donc sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on considère cette équation.
On passe à l'exponentielle :

$$\forall x > 0, \quad 2\ln x + \ln(x+1) = \ln(2x) \iff e^{2\ln x} \times e^{\ln(x+1)} = e^{\ln(2x)} \iff x^2(x+1) = 2x$$

Cette dernière équation se résout facilement :

$$x^2(x+1) = 2x \iff x = 0 \text{ ou } x(x+1) = 2 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

Puisque les valeurs 0 et -2 ne sont pas dans $\mathbb{R}_+^*$, on a une seule solution :

$$\forall x > 0, \quad 2\ln x + \ln(x+1) = \ln(2x) \iff x = 1.$$

4. Notons que $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$. Ainsi, on pose $X = 2^x = e^{x\ln 2}$, et on a

$$4^x - 2^x \geqslant 6 \iff X^2 - X \geqslant 6.$$

Or le trinôme $X^2 - X - 6$ est positif, sauf entre ses racines -2 et 3. Ainsi, on a

$$4^x - 2^x \geqslant 6 \iff 2^x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$$

Or, $2^x = e^{x\ln 2} > 0$, donc

$$2^x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[\iff e^{x\ln 2} \in [3, +\infty[\iff 3 \leqslant e^{x\ln 2} \iff \frac{\ln 3}{\ln 2} \leqslant x.$$

Exercice 2 - Une formules liant Arcsin **et** Arctan**.**

1. Voir cours.

2. La fonction u est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$: $u'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0$, donc u est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, et on a le tableau de variations suivant pour u :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$			
u	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1

Ainsi on a : $u(x) \in [-1,1]$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

3. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) = \frac{1-x}{1+x} \in]-1,1[$ d'après la question précédente. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} = -\frac{2}{(1+x)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} = -\frac{2(1+x)}{(1+x)^2\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}} \\ &= -\frac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. Introduisons la fonction $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$. La fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = -\frac{1}{2}f'(x).$$

Ainsi, la fonction $h : x \mapsto f(x) + 2g(x) = \operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x}) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est nulle. Ainsi h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $h(1) = \operatorname{Arcsin} 0 + 2\operatorname{Arctan} 1 = 0 + 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x}) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

On vérifie directement que cette formule est aussi vraie pour $x = 0$.

5. **a.** On sait que $1 + \tan^2 = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$, et donc $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$. On a alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\operatorname{Arctan}(a)) = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} a)} = \frac{1}{1+a^2}.$$

b. On rappelle que $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$. Ainsi,

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \cos(2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}) = 2\cos^2(\operatorname{Arctan}\sqrt{x}) - 1 = \frac{2}{1+x} - 1 = \frac{1-x}{1+x}.$$

c. En appliquant la fonction Arccos à l'égalité précédente, on a

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \operatorname{Arccos}(\cos(2\operatorname{Arctan}\sqrt{x})) = \operatorname{Arccos}(\frac{1-x}{1+x}) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x}),$$

où on a utilisé la formule $\forall y \in [-1,1]\ :\ \operatorname{Arccos} y + \operatorname{Arcsin} y = \frac{\pi}{2}$.
Il reste à justifier que l'on peut simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos(2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}))$. On sait que $\operatorname{Arccos}(\cos(y)) = y$ pour $y \in [0,\pi]$. Or on a

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x} \in [0,\pi[.$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \operatorname{Arccos}(\cos(2\operatorname{Arctan}\sqrt{x})) = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}.$$

Au final, on retrouve la formule annoncée :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x})$$

Exercice 3 - Etude d'une bijection . On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

1. On introduit la fonction $h : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$, qui vérifie $h'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$. On trace le tableau de variations (voir exercice précédent pour un tableau similaire) et on trouve que

$$h(x) > 0 \iff x \in]-1,1[.$$

Ainsi, f est bien définie sur l'intervalle $]-1,1[$.
Notez qu'on pouvait aussi prouver rapidement cela par des inégalités directes.

2. On a, pour $x \in]-1,1[$:

$$f(-x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x}) = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}) = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) = -f(x),$$

ce qui prouve que la fonction f est impaire.

3. Pour $x \in]-1,1[$, on a $h'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$. Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur $]-1,1[$, or la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi par composée, la fonction f est strictement croissante sur $]-1,1[$.

4. Par composition, la fonction f est continue sur $]-1,1[$, elle est de plus strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $]-1,1[$ sur $f(]-1,1[)$, qui reste à déterminer. On a

$$\lim_{x\to -1^+} h(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} h(x) = +\infty$$

et donc par composition de limites :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{X\to 0^+} \ln X = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{X\to +\infty} \ln X = +\infty$$

En outre, f est continue, ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(]-1,1[) = \mathbb{R}$.
Notez qu'il était naturel pour cette question de former un tableau de variations.

5. Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout l'équation

$$y = f(x), \quad \text{d'inconnue } x \in]-1,1[.$$

On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\ &\iff (1-x)e^{2y} = 1+x \\ &\iff x(1+e^{2y}) = e^{2y}-1 \\ &\iff x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}} = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} \end{aligned}$$

6. La question précédente montre que la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction réciproque de f.

7. On pose $X = \operatorname{th} x = f^{-1}(x)$. L'inéquation devient

$$-6X^2 + X + 1 \geqslant 0.$$

Or le trinôme $X^2 - 5X + 6$ est négatif, sauf entre ses racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, ainsi

$$X^2 - 5X + 6 \geqslant 0 \iff X \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \iff -\frac{1}{3} \leqslant \operatorname{th} x \leqslant \frac{1}{2}.$$

On applique la fonction f qui est bien croissante sur son ensemble de définition $]-1,1[$:

$$-\frac{1}{3} \leqslant \operatorname{th} x \leqslant \frac{1}{2} \iff f(-\frac{1}{3}) \leqslant f(\operatorname{th} x) \leqslant f(\frac{1}{2})$$

Or, puisque th est la fonction réciproque de f, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(\operatorname{th} x) = x$, de plus on calcule directement :

$$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{\ln 2}{2} \quad \text{et} \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{\ln 3}{2}.$$

Finalement,

$$-6\operatorname{th}^2(x) + \operatorname{th}(x) + 1 \geqslant 0 \iff -\frac{\ln 2}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 4 - Des suites. Les questions suivantes sont indépendantes

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant A$. Ecrivons la condition, pour un entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geqslant A \iff \sqrt{n} - 1 \geqslant A \iff \sqrt{n} \geqslant A + 1.$$

Cette condition est vérifiée dès que $n \geqslant (A+1)^2$ Ainsi, on pose $N = \lfloor (A+1)^2 \rfloor + 1$. Alors, par construction :

$$n \geqslant N \implies u_n \geqslant A.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to =\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit la suite définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \\ u_0 = 6 \end{cases}.$$

a. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On suit la méthode du cours. Commençons par écrire l'équation du point fixe associée :
$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 3 \iff \ell = 4.$$
On forme la suite $v_n = u_n - \ell$. On a alors
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = \frac{1}{4}u_n + 3 - (\frac{1}{4}\ell + 3) = \frac{1}{4}(u_n - \ell) = \frac{1}{4}v_n,$$
Ainsi $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell = 2$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2 \times (\frac{1}{4})^n$$
et donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \ell = 2 \times (\frac{1}{4})^n + 4.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(\frac{1}{4})^{n+1} < (\frac{1}{4})^n \implies u_{n+1} < u_n,$$
ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante. De plus, puisque $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{4})^n = 0, \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 4.$$

c. On a
$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} 2 \times (\frac{1}{4})^n + 4 = 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4})^n + 4(N+1) \\ = 2\frac{1-(\frac{1}{4})^{N+1}}{1-\frac{1}{4}} + 4(N+1) = \frac{8}{3}(1-(\frac{1}{4})^{N+1}) + 4(N+1) = 4N + \frac{20}{3} - \frac{8}{3\times 4^{N+1}}. \end{aligned}$$
On déduit que $\lim_{N\to+\infty} S_N = 0$.

3. Soit la suite définie par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

a. On a pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \times n^n}{n! \times (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \times \cancel{n!} \times n^n}{\cancel{n!} \times (n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = (\frac{n}{n+1})^n$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{n}{n+1} < 1 \implies (\frac{n}{n+1})^n < 1 \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$
et donc, puisque la suite est positive, $u_{n+1} < u_n$, et la suite est strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

c. Attention, il s'agit d'une forme indeterminée. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{n}{n+1})^n = e^{n \ln \frac{n}{n+1}}.$$
Déterminons la limite de la suite $v_n = n \ln \frac{n}{n+1} = n \ln \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = -n\ln(1+\frac{1}{n})$. On pose $h = \frac{1}{n}$, de sorte que
$$v_n = -\frac{\ln(1+h)}{h}.$$
Il s'agit d'un taux d'accroissement, en effet posant $f(x) = \ln(1+x)$, alors
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0) = 1.$$
Finalement,
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -1$$
et par continuité de l'exponentielle,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}.$$

d. On a $e > 2$ et donc $e^{-1} < \frac{1}{2}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

e. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant N$, on a

$$\forall k \in [\![N\,, n-1]\!]\,, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Come toutes les quantités sont positives, on fait le produit télescopique entre N et n de ces $n-N$ inégalités :

$$\frac{u_n}{u_N} \leqslant (\frac{1}{2})^{n-N} \iff u_n \leqslant u_N(\frac{1}{2})^{n-N}.$$

Finalement, on a

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2^N u_N \times (\frac{1}{2})^n.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{2})^n = 0$, et donc par encadrement (ici N est fixé) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 5 - Divers : Equations, logique, fonctions et ensembles. Les questions suivantes sont indépendantes

1. Notons $\alpha = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}$. Prenons la tangente de ce nombre :

$$\tan\alpha = \tan(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

Attention à ne pas déduire trop vite que $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On peut dire pour l'instant que

$$\operatorname{Arctan}(\tan\alpha) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Estimons dans quel intervalle se situe α. On a

$$0 < \frac{1}{2} < 1, \quad \text{et} \quad \text{donc} \operatorname{Arctan} 0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} < \operatorname{Arctan} 1 \iff 0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

On montre de même que

$$0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4},$$

et donc en ajoutant

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Or, on sait que pour $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\operatorname{Arctan}(\tan y) = y$, par construction de la fonction Arctan. Ainsi, on a

$$\alpha = \operatorname{Arctan}(\tan\alpha) \iff \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

2. Soit $x \in B$. Distinguons deux cas :
- Ou bien $x \in A$. Dans ce cas, $x \in A \cap B$. Mais $A \cap B \subset A \cap C$. Donc $x \in C$.
- Ou bien $x \notin A$. Mais, comme $x \in B$, on a tout de même $x \in A \cup B$. Mais $A \cup B \subset A \cup C$. Donc $x \in A \cup C$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in C$. Puisque $x \notin A$, on a $x \in C$.

Dans les deux cas, $x \in C$. cela prouve que $B \subset C$.

3. **a.** On a

$$(p,q) \in f^{-1}(\{0\}) \iff f(p,q) = 0 \iff p^2 - q^2 = 0 \iff (p-q)(p+q) = 0 \iff p = q \ \text{ ou } \ p = -q,$$

Or on f étant définie sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on déduit :

$$(p,q) \in f^{-1}(\{0\}) \iff p = q.$$

b. On a $f(0,0) = f(1,1)$, et donc la fonction n'est pas injective.

c. On a

$$f(p,q) = 2 \iff (p+q)(p-q) = 2.$$

Ainsi $p+q$ et $p-q$ divisent 2.

d. Les diviseurs de 2 sont 1 et 2. Puisque $p+q \geqslant 0$, on a deux possibilité
- Ou bien $p+q = 1$, et alors $p-q = 2$. On déduit en ajoutant que $p = \frac{3}{2}$, qui n'est pas entier.
- Ou bien $p+q = 2$, et alors $p-q = 1$. On déduit encore en ajoutant que $p = \frac{3}{2}$, qui n'est pas entier.

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction.

4. La question précédente montre que 2 n'a pas d'antécédants par f. Cela prouve que f n'est pas surjective.