DST 4

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 2 pages et 5 exercices indépendants.

Exercice 1 - Une équation différentielle d'ordre 1.

1. a. Justifier que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

est bien définie sur l'intervalle $]0,1[$.

b. Déterminer ses limites aux bornes de l'intervalle.

c. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, donner une primitive de f.

2. On étudie l'équation différentielle

$$\forall x \in]0,1[, \quad y'(x) + \cos(2x)y(x) = e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{1}$$

a. Résoudre l'équation différentielle (1).

b. Déterminer les solutions qui vérifient $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 1$.

c. Bonus : existe-t-il des solutions qui admettent un prolongement de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$?

Exercice 2 - Une équation différentielle d'ordre 2.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 6xe^{-3x} + 7e^{4x} \\ y(0) = -\frac{6}{7} \\ y'(0) = \frac{11}{7} \end{cases} \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.

2. On cherche à déterminer une solution particulière.

a. Déterminer une solution particulière de

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 7e^{4x}.$$

b. On cherche à présent une solution particulière de

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 6xe^{-3x}. \tag{3}$$

(i) Soit $y_p = x \mapsto P(x)e^{-3x}$ où P est un polynôme. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que P soit solution particulière de (3).

(ii) En déduire un polynôme P solution.
(iii) En déduire une solution particulière du problème initial.

3. En déduire la solution générale de

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 6xe^{-3x} + 7e^{4x}.$$

4. Résoudre le problème de Cauchy (2).

Exercice 3 - Primitives des fractions rationnelles (deux questions indépendantes).

1. **a.** Donner l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{x}{x^2+3x+2}$

b. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+3+2e^{-x}}$.

2. Pour $\omega \in]-1,1[$ fixé, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+\omega x+1}$.

Exercice 4 - Deux exercices de suite.

1. Soit la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+3} \\ u_0 = 0 \end{cases}.$$

a. Représenter par une illustration les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,6]$.

c. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x\ln(1+x) = \frac{1}{n^2}$, d'inconnue $x > 0$, possède une unique solution, que l'on note u_n.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

d. Déterminer la limite en 0 de $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$. Plus dur : en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1.$$

Exercice 5 - Une grosse étude de fonction.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. **a.** Justifier que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que f est continue en 0.

c. Etudier les variations de f.

d. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

2. **a.** Donner la limite de f en $+\infty$.

b. Donner la limite de $x \mapsto f(x) - x$ en $+\infty$ (on pourra poser $u = \frac{1}{x}$).

c. Soit $u > 0$. Enoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction $g : t \mapsto (1+t)e^{-t}$ sur l'intervalle $[0,u]$.

d. En déduire que

$$\forall u \in [0,+\infty[, \quad -u^2 \leqslant (1+u)e^{-u} - 1 \leqslant 0.$$

e. En déduire que

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant x.$$