ex1

1/a) $\forall x \in]0,1[, \quad x > 0$ et $1-x>0$

d'où

$\forall x \in]0,1[\qquad x(1-x) > 0$

donc

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est définie sur $]0;1[$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x(1-x) = 0^+$, d'où, $\lim\limits_{0+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} x(1-x) = 0^+$, d'où, $\lim\limits_{0+} f(x) = +\infty$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \underset{\text{Chgt de var}}{=} \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\,2u\,du = \int \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \left[2\operatorname{Arcsin} u\right]$

$\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{cases}$

d'où

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \left[2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})\right]$

2) a) Sol eq homogène

Soit $a : x \mapsto \cos(2x)$ et une primitive A de a sur $]0;1[$

$A : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$

$y_H : x \longmapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}, \lambda \in \mathbb{R}$

Sol part de l'eq

On utilise la MVP

Soit $y_P : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}\lambda(x)$

y_P sol ssi $e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}\lambda'(x) = e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

d'où

y_P sol ssi $\lambda'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

or, d'après Q1

$\lambda : x \longmapsto 2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})$ est sol

d'où $y_P : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} \times 2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})$

Sol générale

$y : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}\left(2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) + \lambda\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 1 \iff 1 \times (0 + \lambda) = 1 \iff \lambda = 1$

$$y : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} \left(2\,\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) + 1 \right)$$

c) Mq la fct g ne peut être dérivable en 0

Soit $f : x \longmapsto e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} \left(2\,\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) + \lambda \right)$ si $x \in]0;1[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lambda$

Donc
$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} \left(2\,\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) + \lambda \right) & \text{si } x \in [0;1] \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudions le taux d'accroiss^t en 0

$$\frac{\tilde{f}(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda \underbrace{\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} - 1}{x - 0} \right)}_{\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}} + \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}\, 2\,\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) - 0}{x - 0}}_{(2)\ T(x)}$$

avec $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}$

donc admet par limite en 0

$h'(0) = -\frac{1}{2} \times 2\cos(0)\, e^{0} = -1$

$$T(x) = 2e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} \frac{\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) - \mathrm{Arcsin}(\sqrt{0})}{\sqrt{x} - \sqrt{0}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or, $\lim\limits_{0} 2e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)} = 2$

$\lim\limits_{X \to 0} \frac{\mathrm{Arcsin}(X) - \mathrm{Arcsin}(0)}{X - 0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1$

et $\lim\limits_{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

donc

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = +\infty$

donc pas de prolong^t dérivable en 0.

ex 2

1) Soit le polynôme caractéristique associé à l'éq

$$P = X^2 + 6X + 9 = (X+3)^2$$

$y_H : x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{-3x} \quad , \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

2) a) Soit $y_P : x \mapsto P(x) e^{-3x}$

y_P sol $\Leftrightarrow \left(\cancel{9P(x)} - \cancel{6P'(x)} + P''(x)\right) + 6\left(\cancel{P'(x)} - \cancel{3P(x)}\right) + \cancel{9P(x)} = 6x$

y_P sol $\Leftrightarrow \quad P''(x) = 6x$

b) $P : x \mapsto x^3$ est une sol

d'où $\quad y_P : x \mapsto x^3 e^{-3x}$

c) Soit $y_{P_1} : x \mapsto \lambda e^{4x}$

y_{P_1} sol $\Leftrightarrow \lambda(16 + 24 + 9) e^{4x} = 7 e^{4x}$

y_{P_1} sol $\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{7}$

d'où $\quad y_{P_1} : x \mapsto \frac{1}{7} e^{4x}$

d) $y_P : x \mapsto \frac{1}{7} e^{4x} + x^3 e^{-3x}$

3) $y : x \mapsto \frac{1}{7} e^{4x} + e^{-3x}(x^3 + \alpha x + \beta) \quad , \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

4) $\begin{cases} y(0) = -\frac{6}{7} \\ y'(0) = \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{7} + \beta = -\frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} - 3\beta + \alpha = \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

$y : x \mapsto \frac{1}{7} e^{4x} + e^{-3x}(x^3 - 2x - 1)$

ex3

1) $\forall x > -1, \quad x^3 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$\forall x > -1, \quad f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} \qquad$ D.E.S

d'où l'ensemble des primitives de f sur $]-1;+\infty[$ est

$$\left\{ x \longmapsto \ln(x+1) - \ln(k+2) + k, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

2) $$\int \frac{e^x}{e^x+3+2e^{-x}}\,dx = \int \frac{u}{u+3+\frac{2}{u}} \times \frac{1}{u}\,du = \int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du$$

Chgt var
$$\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$$

$$= \left[\ln(u+1) - \ln(u+2) \right] = \left[\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right) \right]$$

3) $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{4}x^2 + wx + 1 = \frac{1}{4}(x^2+4wx+4) = \frac{1}{4}\left((x+2w)^2 + 4(1-w^2)\right)$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{4}\left((x+2w)^2 + 4(1-w^2)\right)}\,dx = 4\int \frac{1}{4(1-w^2)} \, \frac{1}{\left(\left(\frac{x+2w}{2\sqrt{1-w^2}}\right)^2 + 1\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-w^2}\int \frac{1}{u^2+1}\, 2\sqrt{1-w^2}\,du = \frac{2\sqrt{1-w^2}}{1-w^2}\left[\operatorname{Arctan}(u)\right]$$

Chgt var
$$u = \frac{x+2w}{2\sqrt{1-w^2}}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{1-w^2}}\,dx$$

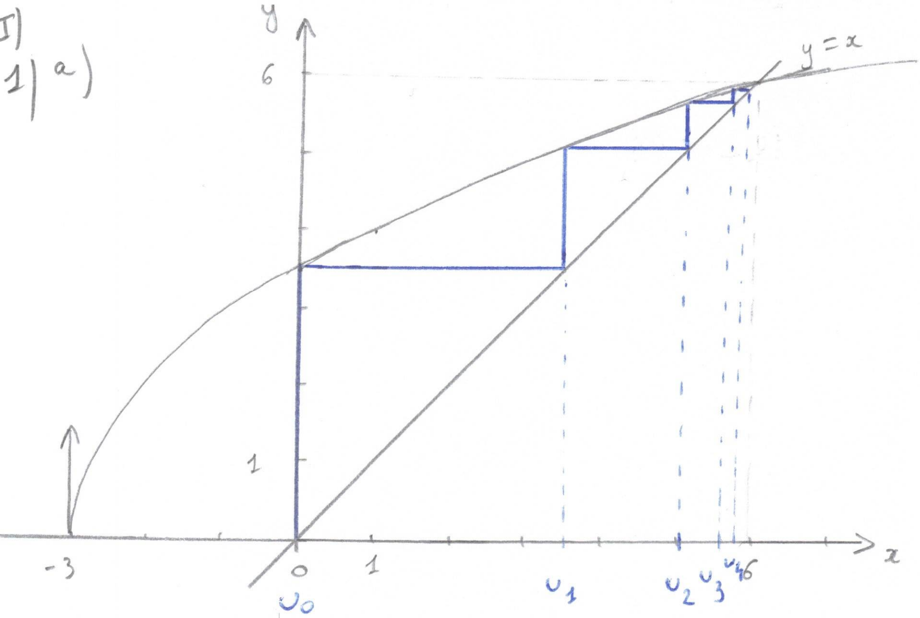
d'où

$$\int f(x)\,dx = \left[\frac{2}{\sqrt{1-w^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+2w}{2\sqrt{1-w^2}}\right) \right]$$

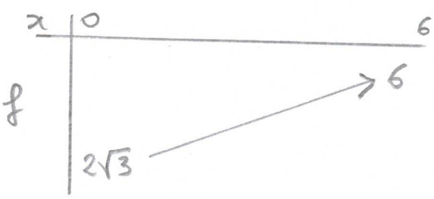
ex 4

I)

1) a)



b) Soit $f : x \longmapsto 2\sqrt{x+3}$



$\forall x \in [0,6], \ f(x) \in [2\sqrt{3}, 6] \subset [0,6] \quad (*)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P_n) : (0 \leq u_n \leq 6)$

. (P_0) vraie car $u_0 = 0 \in [0,6]$

∘ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp (P_n) vraie et mq (P_{n+1}) vraie

$u_n \in [0,6] \Rightarrow f(u_n) \in [0,6]$ (d'après *)

Or $f(u_n) = u_{n+1}$

d'où $u_{n+1} \in [0,6]$

∘ (P_0) vraie et prop héréditaire

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in [0,6]$

c) Mq $(u_n) \nearrow$ (rec) :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P_n) : (u_n \leq u_{n+1})$

. $u_0 = 0$ et $u_1 = 2\sqrt{3}$, donc $u_0 \leq u_1$, donc (P_0) vraie

∘ Soit $n \in \mathbb{N}$, supp (P_n) vraie et mq (P_{n+1}) vraie

On a : $u_n \leq u_{n+1}$

Or, $f \nearrow$ sur $[0,6]$, d'où $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

∘ (P_0) vraie et prop héréditaire

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq u_{n+1}$

d'où $(u_n) \nearrow$ (m̃ strict^t)

d) $(u_n) \nearrow$ majorée par 6

d'où, d'après T.L.M

(u_n) cv vers $\ell \in [0,6]$

Or f continue sur $[0,6]$

d'où $\ell = f(\ell) \iff \ell = 2\sqrt{\ell+3} \iff \begin{cases} \ell^2 = 4(\ell+3) \\ \ell \in [0,6] \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \ell^2 - 4\ell - 12 = 0 \\ \ell \in [0,6] \end{cases} \iff \begin{cases} (\ell-6)(\ell+2) = 0 \\ \ell \in [0,6] \end{cases} \iff \ell = 6$$

d'où (u_n) cv vers 6

II) 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto x \ln(1+x) - \frac{1}{n^2}$

x	0	$+\infty$
f	$-\frac{1}{n^2}$ $\nearrow$	$+\infty$

$\begin{cases} f \text{ cont de } \mathbb{R}_+ \text{ ds } \left[-\frac{1}{n^2} ; +\infty\right[\\ f \nearrow\nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ 0 \in \left[-\frac{1}{n^2} ; +\infty\right[\end{cases}$

d'où, d'après T.B,

$\exists !\ u_n \in \mathbb{R}_+ \ /\ f_n(u_n) = 0$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \iff u_{n+1} \ln(1+u_{n+1}) - \frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

$$\iff u_{n+1} \ln(1+u_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (*)$$

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} \ln(1+u_{n+1}) - \frac{1}{n^2} \overset{(*)}{=} \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \leqslant 0$$

Or $f_n \nearrow$ et $f_n(u_{n+1}) \leqslant 0 = f_n(u_n)$

d'où $u_{n+1} \leqslant u_n$

d'où $(u_n) \searrow$

c) $(u_n) \searrow$ minorée par 0

d'où (u_n) cv vers ℓ $(\ell \geqslant 0)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$ (f continue sur $\mathbb{R}_+$)

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \left(u_n \ln(1+u_n) - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

Or, $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

d'où

$$\lim_{+\infty} u_n \ln(1+u_n) = 0$$

d'où

$$\ell \ln(1+\ell) = 0 \iff (\ell = 0 \text{ ou } \ln(1+\ell) = 0)$$
$$\iff \ell = 0$$

donc (u_n) cv vers 0

d) $$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u) - \ln(1+0)}{u - 0} = \underbrace{\frac{1}{1+0}}_{\text{nb dérivé de la fct}} = 1$$

$f : u \longmapsto \ln(1+u)$

$f' : u \longmapsto \frac{1}{1+u}$

$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0 \iff u_n \ln(1+u_n) = \frac{1}{n^2}$

$$\iff \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = \frac{1}{n^2 u_n^2}$$ ($u_n \neq 0$ car $f(0) = -\frac{1}{n^2} < 0$)

Or, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

donc, d'après Q2d

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 u_n^2} = 1 \iff \lim_{+\infty} (n u_n)^2 = 1$$

$$\iff \lim_{+\infty} (n u_n) = \sqrt{1} = 1$$

(car $u_n > 0$)

ex 5

1) $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left((k-1)+2\right)\binom{n}{k-1} = \sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n}{k-1} + 2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k-1}$$

d'où

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\,n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}}_{\text{glisst}}$$

d'où

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!\,(n-k+1)!} + 2\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} - \underset{\binom{n}{0}}{\underset{\uparrow}{1}} - \underset{\binom{n}{n}}{\underset{\uparrow}{1}}\right)$$

d'où

$$S_n = n\sum_{k=2}^{n}\binom{n-1}{k-2} + 2\underbrace{(2^n-2)}_{\text{f. binôme}}$$

d'où

$$S_n = n\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k} + 2(2^n-2)$$

d'où

$$S_n = n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^k 1^{n-1-k} - \underset{\binom{n-1}{n-1}}{\underset{\uparrow}{1}}\right) + 2(2^n-2)$$

d'où

$$S_n = n(2^{n-1}-1) + 2^{n+1} - 4$$

d'où

$$S_n = 2^{n-1}(n+4) - (n+4) = (2^{n-1}-1)(n+4)$$

2)
$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}$$

d'où

$$T_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)\ln(k+1)} - \frac{\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right)$$

d'où (somme telescopique)

$$T_n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

ex 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m^2+m-2 & m^2-1 & 2m-5 \\ -3 & m^2+m-2 & 0 & 3m^3-9m+15 \\ -1 & 3m^2+3m-6 & 3m^2-3 & 3m^3-3m+3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m^2+m-2 & m^2-1 & 2m-5 \\ 0 & 4m^2+4m-8 & 3m^2-3 & 3m^3-3m \\ 0 & 4m^2+4m-8 & 4m^2-4 & 3m^3-m-2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m^2+m-2 & m^2-1 & 2m-5 \\ 0 & 4(m^2+m-2) & +3(m^2-1) & 3m(m^2-1) \\ 0 & 0 & m^2-1 & 2m-2 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

Or, $m^2+m-2 = (m-1)(m+2)$ et $m^2-1 = (m+1)(m-1)$
et $3m^3-3m = 3m(m+1)(m-1)$

si $m=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

système incompatible $\quad S = \emptyset$

vide

si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad S = \{(-3, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

plan

si $m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x + 3z = -9 \\ 9z = -18 \\ 3z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 - 3\times(-2) \\ y = y \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = y \\ z = -2 \end{cases}$$

droite

$$S = \{(-3, y, -2),\ y \in \mathbb{R}\}$$

si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{4}(m^3 - 3m + 6) \\ y = \frac{3}{4}(m-1) \\ z = \frac{2}{m+1} \end{cases} \quad S = \left\{\left(-\frac{3}{4}(m^3-3m+6), \frac{3}{4}(m-1), \frac{2}{m+1}\right)\right\}$$

point