18 janvier 2025

D.S. n°4

Une rédaction claire, rigoureuse, soignée est une condition nécessaire à la réussite.
(Soin-rédaction-rigueur : 4 points)

<u>Exercice 1 :</u> (points)

Soit m un réel et $(\mathcal{S}_m)$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} x + my + mz = -1 \\ mx + y + mz = -1 \\ m^2x + my + (2m^2 - m)z = -m^2 \end{cases}$$

1) Soit $m = 2$. Résoudre $(\mathcal{S}_2)$.

2) Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$ en discutant suivant la valeur du paramètre réel m.

<u>Exercice 2 :</u> (points)

1) Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f : t \longmapsto \frac{1}{t(t+1)}$$

2) Résoudre l'équation différentielle.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + \frac{e^x}{e^x + 2}\, y(x) = \frac{1}{(e^x + 2)(e^x + 1)}$$

<u>Exercice 3 :</u> (points)

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{2t}{t^4 - 4t^2 + 13}$

1) Justifier que la fonction F ci-dessous est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$F : x \longmapsto \int_{\sqrt{2}}^{x} f(t)\, dt$$

2) En utilisant le changement de variable $u = t^2$, déterminer F.

3) Calculer $F(\sqrt{2})$ en utilisant l'expression de F obtenue dans la **question 2**.

Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $F(\sqrt{2})$ que vous trouverez à l'aide de la **question 1** ?

<u>Exercice 4 :</u> (points)

<u>Partie I :</u>

Soient $f : t \longmapsto e^t(t-1)$ et $x > 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]0\,, x[$ tel que : $f(x) + 1 = ce^c\,(x - 0)$

2) En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad 0 \leq f(x) + 1 \leq x^2 e^x$$

<u>Partie II :</u>

Soit $g : x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad g'(x) = \frac{f(x) + 1}{x^2}$$

3) En utilisant les **questions I.2 et II.2**, en déduire les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

4) On admet que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad g''(x) \geq 0$$

a) Justifier que g' est minorée et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire, en utilisant un théorème adapté, que g' admet une limite en 0.

c) En déduire que : $g \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Partie III :

On se propose de déterminer $g'(0)$.

Soit $x > 0$.

1) Appliquer les accroissements finis à la fonction $h : t \longmapsto e^t$ sur $[0\,, x]$, montrer que :

$$x \leq e^x - 1 \leq e^x x$$

On considère la fonction $k : t \longmapsto e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$ sur $[0\,, x]$.

On admet (pour « alléger » le devoir) que :

$$0 \leq k(x) \leq (e^x - 1 - x)x$$

2) A l'aide de la **question III.1** et **du résultat admis** montrer que :

$$0 \leq k(x) \leq (e^x - 1)x^2 \leq x^3 e^x$$

3) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} + x^3 e^x$$

4) A l'aide de la **question III.3**, en déduire $g'(0)$ que l'on déterminera en calculant :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Exercice 5 : (points)

On admet que : $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \\ u_0 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Partie I :

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$.
2) Démontrer que l'équation $x = \cos(x)$ admet une unique solution, notée ℓ, sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{\pi}{4}\right]$.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) |u_n - \ell|$
4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5) En déduire la convergence de la suite (u_n).

Partie II :

1) M. Scotto aurait souhaité étudier la même suite avec $u_0 \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Pensez-vous que cela « poserait » un problème ? (une réponse <u>maximum</u> deux lignes est attendue).
2) M. Popoff ajoute: « carrément $u_0 \in \mathbb{R}$ ».

   Qu'en penser ? (une réponse <u>maximum</u> deux lignes est attendue).

Bonus : (dur…uniquement si vous avez tout fini)

On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$définies par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \cos(\cos(v_n)) \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \cos(\cos(w_n)) \\ v_0 = u_0 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{\pi}{4}\right] \\ w_0 = \cos(u_0) \end{cases}$$

1) Relier les suites à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Justifier que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.