DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 2 pages et 5 exercices indépendants.

Exercice 1 - Deux techniques pour les puissances de matrice.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n.

2. **a.** Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est une matrice inversible et calculer son inverse.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, notée D que l'on explicitera.

c. (Question faisable sans avoir trouvé P^{-1}). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

d. En déduire A^n pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 - Un système à paramètres. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système, noté (S_m), suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + (m^2+m-2)y + (m^2-1)z & = 2m-5 \\ -3x + (m^2+m-2)y & = 3m^3 - 9m + 15 \\ -x + 3(m^2+m-2)y + 3(m^2-1)z & = 3m^3 - 3m + 3 \end{array} \right.$$

1. **a.** Introduire une matrice $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ et une colonne $B_m \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que le système (S_m) s'écrive sous la forme $A_mX = B_m$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

b. Dire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice A_m est inversible, et le cas échant l'inverser.

c. Pour ces valeurs de m, en déduire les solutions du système (S_m).

2. Pour les autres valeurs de m, résoudre le système.

Exercice 3 - DL et équivalents. (4 questions indépendantes)

1. **a.** Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ admet une limite en 0 et la calculer.

b. Question bonus (plus dure) : montrer que cette fonction admet un prolongement dérivable en 0, donner l'équation de la tangente, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à la tangente.

2. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x^{3/2}}$$
a. Déterminer un équivalent simple de f en 0. La fonction peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?
b. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par
$$u_n=\left(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})\right)^n.$$
a. Montrer que
$$\tan(\frac{\pi}{4}+x)\underset{x\to 0}{=}1+2x+2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)$$
b. En déduire que
$$u_n=e^2+\frac{4e^2}{3}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}).$$

4. (Une suite implicite)
a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'équation
$$x^3+nx-1=0,$$
d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n.
b. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
c. Montrer que : $u_n-\frac{1}{n}=-\frac{u_n^3}{n}$. En déduire que, lorsque $n\to+\infty$:
$$u_n-\frac{1}{n}=o(\frac{1}{n}).$$
d. (Pour aller plus loin). On pose $y_n=u_n-\frac{1}{n}$.
(i) Substituer u_n par $y_n+\frac{1}{n}$ dans l'équation définissant u_n.
(ii) Montrer que $y_n=-\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})$.
(iii) En déduire un développement asymptotique à deux termes de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 4 - Allure locale d'une fonction.

1. a. Montrer que : $\forall x\in[-\frac{1}{4},+\infty[,\quad 2x^3+2x\geqslant -1$.
b. En déduire que la fonction $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}-x^2$ est bien définie sur $[-\frac{1}{4},+\infty[$.

2. (Question de cours). Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Démontrer que
$$(1+x)^\alpha\underset{x\to 0}{=}1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2).$$
3. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.
4. Préciser la position relative de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$.
5. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique dont on déterminera l'équation.

Exercice 5 - Espaces vectoriels.

1. Montrer que les sous-ensembles suivants sous des sous-espaces vectoriels, et en donner une base.
a. Dans $E=\mathbb{R}^3$, le sous-ensemble $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ \ x+y+z=0\}$. Décrire géométriquement cet ensemble.
b. Dans $E=\mathbb{R}^4$, le sous-ensemble $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|\ \ x+y+2z-t=0\ \text{ et }\ x-y-2z-t=0\}$.
c. Dans $E=M_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
d. Dans $E=\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes tels que $P'(1)=0$.

2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires forment un espace vectoriel.

3. a. Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$, montrer que la famille $(X^2+1,X+1,3)$ est libre.
b. Toujours dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que la famille $(X^2+X,X^2+1,X+1)$ est libre.