DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Cinq exercices indépendants sur l'analyse asymptotique.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2} \times \text{Arctan}(x)$. On rappelle le développement limité suivant, en 0 :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

- **a.** Donner la parité de la fonction f.
- **b.** Montrer que f admet une tangente en 0 et donner son équation.
- **c.** Donner la position relative de f par rapport à cette tangente en 0.
- **d.** Montrer : $\forall x > 0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
- **e.** Montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}).$$

- **f.** En déduire que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on précisera l'équation.
- **g.** Donner la position relative de f par rapport à cette asymptote oblique.

2. Soit la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2+x^3}$.

- **a.** Montrer que h admet un DL à l'ordre 1 en 0.
- **b.** Montrer que h se prolonge par continuité en 0, et préciser la valeur de la fonction prolongée en 0.
- **c.** Montrer que ce prolongement est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'équation de la tangente en 0.
- **d.** Précisez la position relative de la courbe de h par rapport à cette tangente.

3. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$.

- **a.** Justifier que cette fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que, lorsque $h \to 0$ on a $g(-\frac{\pi}{2}+h) = \frac{1}{\sqrt{2}}|h| + o(h)$.
- **c.** La fonction g est-elle dérivable en $-\frac{\pi}{2}$? On justifiera avec soin la réponse.
- **d.** En déduire l'ensemble de dérivablité de g.

4. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $k : x \mapsto \frac{1-e^{-x^2}}{e^x \times \text{Arctan}(x)}$.

- **a.** Donner un équivalent simple de la fonction au voisinage de 0.
- **b.** Donner un équivalent simple de la fonction au voisinage de $+\infty$.

5. Soit f une fonction de classe C^2 dans un voisinage de 0. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(x)}{x}$

Exercice 2 - Deux exercices indépendants sur l'algèbre linéaire.

1. **a.** **(i)** Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $u_1 = (1,1,1,0)$, $u_2 = (1,2,2,-1)$ et $u_3 = (-1,1,3,-1)$. Soit $H = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Donner une base de H.

(ii) Donner une ou des équations caractérisant H.

(iii) Vérifier votre résultat : confirmez que le vecteur $v = (-5,0,8,-1)$ est dans H.

(iv) Donner, avec un minimum de calcul (mais en justifiant) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,v)$

b. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}\}$, et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=y=z\}$

(i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

(ii) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

(iii) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F + G$. La somme est-elle directe ?

2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $F = \{P \in E \mid P(-1) = P'(-1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(-X^3+X^2+10X, -X^3+X^2+6)$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

b. Donner une base de G

c. Déterminer $F \cap G$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires dans E ?

d. Proposer un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (pas besoin de démontrer le résultat).

Exercice 3 - Deux exercices de matrices indépendants.

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la puissance M^n.

Exercice 4 - Exercices indépendants sur les polynômes.

1. **a.** Effectuer la division euclidienne de $X^4 + X^3 + 1$ par $X^2 - 4$.

b. En déduire un polynôme Q et deux constantes $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\} \ : \frac{x^4+x^3+1}{x^2-4} = Q(x) + \frac{ax+b}{x^2-4}$$

c. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x^4+x^3+1}{x^2-4}$ sur $]2,+\infty[$.

2. **a.** Vérifier que -3 est racine de $P = X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 9X + 27$, et déterminer sa multiplicité.

b. En déduire une factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ ainsi que sur $\mathbb{C}$.

c. Donner un équivalent simple de $\frac{P(x)}{(x+3)^3}$ lorsque $x \to -3$.

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On définit par récurrence la suite de polynôme P_n par

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n' - 2XP_n \\ P_0 = 1 \end{cases}.$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que la dérivée n-ième de f vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.

b. Calculer P_1 et P_2.

c. Faire une proposition pour le degré de P_n, son coefficient dominant et sa parité. Démontrer votre résultat par récurrence.