DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Cinq exercices indépendants sur l'analyse asymptotique.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2} \times \text{Arctan}(x)$. On rappelle le développement limité suivant, en 0 :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

- **a.** Donner la parité de la fonction f.
- **b.** Montrer que f admet une tangente en 0 et donner son équation.
- **c.** Donner la position relative de f par rapport à cette tangente en 0.
- **d.** Montrer : $\forall x > 0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
- **e.** Montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}).$$

- **f.** En déduire que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on précisera l'équation.
- **g.** Donner la position relative de f par rapport à cette asymptote oblique.

2. Soit la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $h : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2+x^3}$.

- **a.** Montrer que h admet un DL à l'ordre 1 en 0.
- **b.** Montrer que h se prolonge par continuité en 0, et préciser la valeur de la fonction prolongée en 0.
- **c.** Montrer que ce prolongement est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'équation de la tangente en 0.
- **d.** Précisez la position relative de la courbe de h par rapport à cette tangente.

3. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$.

- **a.** Justifier que cette fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que, lorsque $h \to 0$ on a $g(-\frac{\pi}{2}+h) = \frac{1}{\sqrt{2}}|h| + o(h)$.
- **c.** La fonction g est-elle dérivable en $-\frac{\pi}{2}$? On justifiera avec soin la réponse.
- **d.** En déduire l'ensemble de dérivablité de g.

4. Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $k : x \mapsto \frac{1-e^{-x^2}}{e^x \times \text{Arctan}(x)}$.

- **a.** Donner un équivalent simple de la fonction au voisinage de 0.
- **b.** Donner un équivalent simple de la fonction au voisinage de $+\infty$.

5. Soit f une fonction de classe C^2 dans un voisinage de 0. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(x)}{x}$

Correction :

1. **a.** On montre facilement que f est impaire.

b. Le plus efficace est de faire un DL à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = (1 + o(x))(x + o(x)) = x + o(x).$$

Cela prouve que f a une tangente en 0, dont l'équation est $y = x$.
Notez qu'on aurait pu aussi noter que $f(0) = 0$ et que $f(x) \underset{0}{\sim} x$.

c. On reprend le DL précédent en calculant le terme suivant :

$$f(x) = (1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

ainsi : $f(x) - x \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}x^3 > 0$, ce qui prouve que la courbe de f est au-dessus de sa tanegnte en 0.

d. Voir le cours sur la fonction Arctan, le mieux est de dériver $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x})$.

e. On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on fait donc un DL par rapport à cette variable, en utilisant la question précédente :

$$\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}).$$

f. On a déjà développé Arctan au voisinage de $+\infty$ dans la question précédente. D'un autre côté, on a, au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = x(1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) \times (x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = \frac{\pi}{2}x - 1 + o(1).$$

Cela prouve que la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

g. On reprend les développements précédents. Il n'y a pas besoin de faire beaucoup plus si on anticipe bien car :

$$\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}),$$

et donc

$$f(x) = (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2})) \times (x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{4x} + o(\frac{1}{x}).$$

Ainsi,

$$f(x) - (\frac{\pi}{2}x - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4x} > 0,$$

ce qui prouve que f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2. **a.** On a le DL du cours, que l'on fait à l'ordre 3 vu qu'on va diviser par x^2, en 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ainsi, lorsque $x \to 0$:

$$h(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2(1+x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x)}{1+x} = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x))(1 - x + o(x))) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}x + o(x),$$

ce qui prouve que h admet un DL à l'ordre 1 en 0.

b. D'après le DL précédent, on a $\lim_{x\to 0} h(x) = -\frac{1}{2}$. Ainsi, la fonction h qui est continue sur $\mathbb{R}^*$, se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = -\frac{1}{2}$.

c. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, grâce au DL trouvé :

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{5}{6},$$

ce qui prouve que la fonction h, prolongée en 0, y est dérivable, avec $h'(0) = \frac{5}{6}$. L'équation de la tangente en 0 est : $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$.

Remarque : C'est en fait une propriété du cours : si une fonction h admet un DL à l'ordre 1 en a, elle y est dérivable, et $h'(a)$ se lit sur le DL. En cas de doute, il est tout aussi efficace de le remontrer en passant par la limite du taux d'accroissement.

d. On pousse le DL précédent por trouver (détails laissés à l'élève) :

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}x - \frac{13}{12}x^2 + o(x^2),$$

Ainsi,

$$h(x) - (-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{13}{12}x^2 < 0,$$

ce qui prouve que h reste sous sa tangente dans un voisinage de 0.

3. **a.** On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin x$ et donc $0 \leqslant 1 + \sin x$. Comme $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction h est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée.

b. On peut bien sûr appliquer froidement Taylor-Young, mais il est encore plus efficace d'utiliser une formule de trigo, suivi d'un DL en 0 :

$$\begin{aligned} g(-\frac{\pi}{2} + h) &= \sqrt{1 + \sin(-\frac{\pi}{2} + h)} = \sqrt{1 - \cos(h)} = \sqrt{1 - (1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2))} \\ &= \sqrt{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \sqrt{\frac{h^2}{2}}\sqrt{1 + o(1)} = \frac{|h|}{\sqrt{2}}(1 + o(1)) = \frac{|h|}{\sqrt{2}} + o(h) \end{aligned}$$

c. L'idée est de s'inspirer de la preuve de la non dérivabilité de a valeur absolue en 0. On forme le taux d'accroissement $\frac{g(-\frac{\pi}{2}+h)-g(-\frac{\pi}{2})}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|h|}{h} + o(1)$ et on étudie sa limite à droite et à gauche :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(-\frac{\pi}{2} + h) - g(-\frac{\pi}{2})}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{g(-\frac{\pi}{2} + h) - g(-\frac{\pi}{2})}{h} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui prouve que g n'est pas dérivable en $-\frac{\pi}{2}$.

d. Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, cherchons quand $1 + \sin(x)$ s'annule :

$$1 + \sin(x) = 0 \iff \sin(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

Ainsi, h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. D'après la question précédente, elle n'est pas dérivable en $-\frac{\pi}{2}$, et donc par 2π-périodicité, elle n'est pas dérivable sur $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque : Si $h(x) = \sqrt{f(x)}$ avec f deux fois dérivable, positive ou nulle, il est direct que h est dérivable là où $f > 0$. Mais attention, si $f(x_0) = 0$, la dérivabilité de g en x_0 n'est pas claire. La condition nécessaire et suffisante est : $f''(x_0) = 0$. Pour le voir, faire un DL de f à l'ordre 2 en utilisant que $f'(x_0) = 0$, puisqu'il s'agit d'un minimum.

4. Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $k : x \mapsto \frac{1-e^{-x^2}}{e^x \times \text{Arctan}(x)}$.

a. On a les équivalents suivants, en 0 :

$$1 - e^{-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^2, \quad e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \ \text{ et } \ \text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Ainsi, par produit et quotient :

$$k(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x.$$

b. La situation est différente. On a cette fois :

$$1 - e^{-x^2} \underset{x\to +\infty}{\sim} 1 \ \text{ et } \ \text{Arctan}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$k(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{e^x \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}e^{-x}.$$

5. Comme f est C^2 dans un voisinage de 0, on utlise Taylor-Young pour f et pour f' :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2) \ \text{ et } \ f'(x) = f'(0) + xf''(0) + o(x),$$

ainsi :

$$\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(x)}{x} = \frac{f'(0) + \frac{x}{2}f''(0) + o(x) - (f'(0) + xf''(0) + o(x))}{x} = -\frac{1}{2}f''(0) + o(1).$$

Cela prouve que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(x)}{x} = -\frac{1}{2}f''(0)$.

Exercice 2 - Deux exercices indépendants sur l'algèbre linéaire.

1. **a.** **(i)** Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $u_1 = (1,1,1,0)$, $u_2 = (1,2,2,-1)$ et $u_3 = (-1,1,3,-1)$. Soit $H = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Donner une base de H.

(ii) Donner une ou des équations caractérisant H.

(iii) Vérifier votre résultat : confirmez que le vecteur $v = (-5,0,8,-1)$ est dans H.

(iv) Donner, avec un minimum de calcul (mais en justifiant) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,v)$

b. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right. \}$, et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=y=z\}$

(i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

(ii) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

(iii) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F + G$. La somme est-elle directe ?

2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $F = \{P \in E \mid P(-1) = P'(-1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(-X^3 + X^2 + 10X, -X^3 + X^2 + 6)$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

b. Donner une base de G

c. Déterminer $F \cap G$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires dans E ?

d. Proposer un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (pas besoin de démontrer le résultat).

Correction :

1. **a.** **(i)** La famille $((1,1,1,0),(1,2,2,-1),(-1,1,3,-1))$ est génératrice de H, par définition. Est-elle libre ? Soit (α,β,γ) tels que

$$\alpha(1,1,1,0) + \beta(1,2,2,-1) + \gamma(-1,1,3,-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ -\beta-\gamma=0 \end{array}\right. .$$

Une résolutio rapide conduit à $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille est libre.

(ii) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on cherche une condition pour que $(a,b,c,d) \in H$. On a :

$$(a,b,c,d) \in H \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha u_1 + \beta u_2 + g u_3 = (a,b,c,d).$$

On étudie donc la compatibilité du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta-\gamma=a \\ \alpha+2\beta+\gamma=b \\ \alpha+2\beta+3\gamma=c \\ -\beta-\gamma=d \end{array}\right. , \quad \text{d'inconnues } (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Après échelonnement (à vous de jouer), le système devient :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta-\gamma=a \\ \beta+2\gamma=b-a \\ 2\gamma=c-b \\ 0=d-\frac{1}{2}c+\frac{3}{2}b-a \end{array}\right. , \quad \text{d'inconnues } (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Le système admet donc une solution si et seulement si $d + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b - a = 0$, ou encore sous forme plus agréable :

$$-2a + 3b - c + 2d = 0$$

Ainsi, $H = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, | -2a + 3b - c + 2d = 0\}$. Il est bon de vérifier que les trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 satisfont cette équation.

(iii) On vérifie que le vecteur vérifie l'équation trouvée ci-dessus.

(iv) Puisque $v \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, alors on a $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,v) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Comme on l'a vu, la famille (u_1,u_2,u_3) étant libre, c'est une base de $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,v)$.

b. **(i)** Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right. \}$, et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=y=z\}$

(ii) On échelonne (une seule étape) :

$$(x,y,z,t)\in F \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -2y-2t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-t \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F &= \{(-z,-t,z,t), \quad \text{avec } (z,t)\in\mathbb{R}^2\} = \{z(-1,0,1,0)+t(0,-1,0,1), \quad \text{avec } (z,t)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((-1,0,1,0);(0,-1,0,1)). \end{aligned}$$

Cea prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et que $((-1,0,1,0);(0,-1,0,1))$ en est une famille génératrice. Comme les vecteurs $(-1,0,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre, qui est bien une base de F.

(iii) Pas besoin d'échelonner. On a directement

$$G = \{(z,z,z,t) \ \text{ avec } (z,t)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(0,0,0,1)).$$

Comme ci-dessus, la famille $((1,1,1,0),(0,0,0,1))$ est une base de G.

(iv) A ce stade du cours, on doit le faire à la main. Le mieux est de se servir des bases précédentes. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, on résout

$$(a,b,c,d) = \alpha(-1,0,1,0)+\beta(0,-1,0,1)+\gamma(1,1,1,0)+\delta(0,0,0,1).$$

Une résolution rapide montre qu'il existe une unique solution $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. cela prouve que $E=F+G$, et que la somme est directe.

2. Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ et soit $F=\{P\in E \mid P(-1)=P'(-1)=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}(X^3+X^2-10X, X^3+X^2+6)$.

a. Soit $P\in F$, on l'écrit : $P=aX^3+bX^2+cX+d$, avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. On a alors

$$P\in F \iff \begin{cases} P(-1)=0 \\ P'(-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+b-c+d=0 \\ 3a-2b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=-2a+b \\ c=-3a+2b \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \{aX^3+bX^2+(-3a+2b)X+(-2a+b), \quad \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^3-3X-2)+b(X^2+2X+1), \quad \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((X^3-3X-2),(X^2+2X+1)). \end{aligned}$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et que la famille (X^3-3X+2, X^2-2X+1) est génératrice de F. De plus, cette famille est de degré échelonnée, elle est donc libre. Donc c'est une base de F.

b. On vérifie rapidement que les deux polynômes X^3+X^2-10X et X^3+X^2+6 sont non colinéaires, ils forment dont une famille libre. Ils sont générateurs de G par définition, c'est donc une base de G.

c. Soit $P\in F\cap G$, comme $P\in G$, on a

$$P=\lambda(-X^3+X^2+10X)+\mu(-X^3+X^2+6), \quad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

De plus, comme $P\in F$, on a

$$\begin{cases} P(-1)=0 \\ P'(-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8\lambda+8\mu=0 \\ 5\lambda-5\mu=0 \end{cases} \iff \lambda=\mu.$$

Ainsi, $P=\lambda(-X^3+X^2+10X-X^3+X^2+6)=\lambda(-2X^3+2X^2-10X+6)$. Cela prouve que $F\cap G = \mathrm{Vect}(-2X^3+2X^2-10X+6)$, et que $-2X^3+2X^2-10X+6$ est une base de $F\cap G$.

Exercice 3 - Deux exercices de matrices indépendants.

1. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la puissance M^n.

Correction :

Exercice 4 - Exercices indépendants sur les polynômes.

1. **a.** Effectuer la division euclidienne de $X^4 + X^3 + 1$ par $X^2 - 4$.

b. En déduire un polynôme Q et deux constantes $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\} \ : \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2 - 4} = Q(x) + \frac{ax + b}{x^2 - 4}$$

c. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x^4+x^3+1}{x^2-4}$ sur $]2, +\infty[$.

2. **a.** Vérifier que -3 est racine de $P = X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 9X + 27$, et déterminer sa multiplicité.

b. En déduire une factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ ainsi que sur $\mathbb{C}$.

c. Donner un équivalent simple de $\frac{P(x)}{(x+3)^3}$ lorsque $x \to -3$.

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On définit par récurrence la suite de polynôme P_n par

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n' - 2XP_n \\ P_0 = 1 \end{cases}.$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que la dérivée n-ième de f vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.

b. Calculer P_1 et P_2.

c. Faire une proposition pour le degré de P_n, son coefficient dominant et sa parité. Démontrer votre résultat par récurrence.

Correction :

1. **a.** Après calculs, le quotient vaut $Q = X^2 + X + 4$ et le reste $R = 4X + 17$.

b. D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 4)(x^2 - 4) + 4x + 17,$$

et donc en divisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\} \ : \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2 - 4} = (x^2 + x + 4) + \frac{4x + 17}{x^2 - 4}$$

c. On a besoin de la décomposition en éléments simples de $\frac{4X+17}{X^2-4}$. On remarque que $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ est scindé à racines simples, on est donc dans le cadre classique, et on a après calculs

$$\frac{4X + 17}{X^2 - 4} = \frac{\frac{25}{4}}{X - 2} - \frac{\frac{9}{4}}{X + 2}.$$

On déduit la primitive demandée :

$$\int^x \frac{t^4 + t^3 + 1}{t^2 - 4} \, \mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{25}{4} \ln|x-2| - \frac{9}{4} \ln|x+2| = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{25}{4} \ln(x-2) - \frac{9}{4} \ln(x+2) \ \text{ pour } x > 2$$

2. **a.** On calcule : $P(3) = 81 - 5 \times 27 + 6 \times 9 - 9 \times 3 + 27 = 0$, ce qui prouve que -3 est racine de P. Trouvons sa multiplicité en calculant les dérivées successives : $P'(-3) = 0$, ce qui prouve que la multiplicité est au moins 2, puis $P''(-3) = 27 \neq 0$, et donc la multiplicité est exactement 2 : -3 est racine double.

b. On s'ait d'après la question précédente que P peut être factorisé par $(X + 3)^2$:

$$\exists \in \mathbb{R}[X], \quad P(X) = (X + 3)^2 Q.$$

On peut trouver Q avec une division euclidienne, mais il y a plus rapide. Il est direct que $\deg(Q) = 2$, ainsi, on peut chercher sous la forme $Q = aX^2 + bX + c$. Il est direct que $a = 1$ et $c = 3$. En développant, on trouve par identifiant $b = -1$, ainsi :

$$P(X) = (X + 3)^2(X^2 - X + 3).$$

Le trinôme $X^2 - X + 3$ a un discriminant négatif, il est donc irréductible sur $\mathbb{R}$. Par contre, sur $\mathbb{C}$, ses racines sont $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$, et on a alors la factorisation en produit de facteurs irréductibles :

$$P = (X+3)^2(X - \frac{1-i\sqrt{11}}{2})(X - \frac{1+i\sqrt{11}}{2}).$$

c. En utilisant la factorisation trouvée sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \neq -3 : \quad \frac{P(x)}{(x+3)^2} = \frac{x^2-x+3}{x+3} \underset{x \to -3}{\sim} \frac{15}{x+3}.$$

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On définit par récurrence la suite de polynôme P_n par

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n' - 2XP_n \\ P_0 = 1 \end{cases}.$$

a. Soit l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{H}_n : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}.$$

Initialisation $n = 0$: Puisque $P_0 = 1$ et que $f^{(0)}(x) = e^{-x^2}$, la proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie.
Hérédite : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$. On dérive ce produit :

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)e^{-x^2} - 2xP_n(x)e^{-x^2} = (P_n'(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}.$$

Or, on a par définition de la suite (P_n) : $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$, ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
On déduit le résultat par principe de récurrence.

b. On trouve $P_1 = -2X$ et $P_2 = 4X^2 - 2$

c. On pense que $\deg(P_n) = n$, que le coefficient dominant est $(-2)^n$, et que P_n a la même parité que n. On démontre facilement ces résultats par récurrence en exploitant la relation de récurrence.