DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

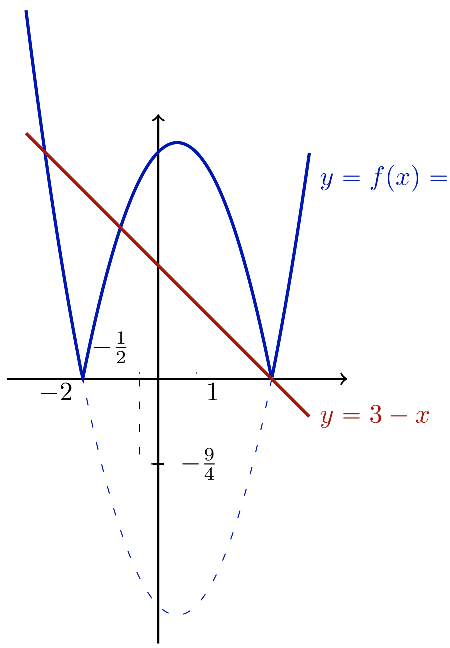
Ce sujet comporte 6 pages et 6 exercices indépendants.

Exercice 1 - Questions de cours. Voir cours.

Exercice 2 - Des (in)égalités (Questions indépendantes).

1. Avant de se lancer, on cherche à enlever les valeurs absolues. On raisonne sur le signe de $x^2 - x - 6$. Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 25$, ses racines sont $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$. On a alors
   - Si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 3$, on a $x^2 - x - 6 \geqslant 0$ et donc $|x^2 - x - 6| = x^2 - x - 6$. Ainsi, dans ce cas, on a :
   $$|x^2 - x - 6| \geqslant -x + 3 \iff x^2 - x - 6 \geqslant -x + 3 \iff x^2 - 9 \geqslant 0$$
   Cette dernière inéquation a pour solution sur $\mathbb{R}$: l'intervalle $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$, ainsi les solutions sur $]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$ sont $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.
   - Si $x \in [-2, 3]$, on a $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ et donc $|x^2 - x - 6| = -x^2 + x + 6$. Ainsi, dans ce cas, on a :
   $$|x^2 - x - 6| \geqslant -x + 3 \iff -x^2 + x + 6 \geqslant -x + 3 \iff 0 \geqslant x^2 - 2x - 3$$
   Cette dernière inéquation a pour solution sur $\mathbb{R}$, après recherche de racines, l'intervalle $[-1, 3]$, ainsi les solutions sur $[-2, 3]$ sont $[-1, 3]$.

   Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty]$.



2. **a.** On étudie la différence $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - (1+x)$. On cherche à montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = e^x - 1$. Il est direct que $f'(x) = 0 \iff x = 0$, que $f' < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f' > 0$ sur $]0, +\infty[$. On déduit les variations de f, que l'on résume dans un tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ et donc l'inégalité demandée.

b. On définit de même $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + e^2 \times \frac{x^3}{6})$. On cherche à montrer que cette fonction est négative. On calcule les dérivées successives, jusqu'à ce que le signe devienne clair :

$$g'(x) = e^x - (1 + x + e^2 \times \frac{x^2}{2}),\quad g''(x) = e^x - (1 + e^2 \times x) \quad \text{et} \quad g^{(3)}(x) = e^x - e^2.$$

Or on a

$$x \in [0,2] \implies 1 \leqslant e^x \leqslant e^2, \quad \text{et donc : } \forall x \in [0,2],\ g^{(3)}(x) \leqslant 0.$$

On fait une cascade de raisonnements sur les dérivées :
- La fonction $g^{(3)}$ est décroissante sur $[0,2]$.
- Puisque $g^{(3)}(0) = 0$, on a $g^{(3)} \leqslant 0$ sur $[0,2]$. Donc g'' décroit sur $[0,2]$.
- Puisque $g''(0) = 0$, on a $g'' \leqslant 0$ sur $[0,2]$. Donc g' décroit sur $[0,2]$.
- Puisque $g'(0) = 0$, on a $g' \leqslant 0$ sur $[0,2]$. Donc g décroit sur $[0,2]$.
- Puisque $g(0) = 0$, on a $g \leqslant 0$ sur $[0,2]$. C'est ce qu'on voulait montrer.

Exercice 3 - Etude d'une foncion .

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}.$$

a. On a clairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x + e^{-x} > 0,$$

ce qui permet de justifier que la fonction f est bien définie, comme l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas. Il est direct que $f(-x) = f(x)$, donc la fonction est paire, et que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

b. Puisque f est un quotient de fonction strictement positives, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0.$$

Elle n'a pas de minimum puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, ce qui indique que f peut être aussi petit que possible (mais comme on l'a vu elle ne s'annule pas).
Nous ferons des preuves plus quantitatives quand on aura proprement définit la notion de limite.

c. La fonction f est clairement dérivable, comme inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas. On a la formule $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$, qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Ainsi, la fonction f' est du signe $-(e^x - e^{-x})$: strictement négative sur $]0, +\infty[$ et strictement positive sur $]-\infty, 0[$ (on renvoie au DM pour une justification détaillée). La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi, elle a un maximum en 0, qui vaut $f(0) = \frac{1}{2}$. On dresse le tableau de variation, :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

d. Par lecture du tableau, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque la fonction f est continue, un réel $y \in]0, \frac{1}{2}[$ a deux antécédants par la fonction f. Elle n'est donc pas bijective.

2. La fonction g est strcitement décroissante sur $[0, +\infty[$, donc elle définit une bijection de $[0, +\infty[$ dans son image, qui vaut $]0, \frac{1}{2}]$, par lecture du tableau, et toujours d'après le TVI.

Déterminons la bijection réciproque. On fixe $y \in]0, \frac{1}{2}]$, et on résout l'équation $y = g(x)$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \iff e^x + e^{-x} = \frac{1}{y},$$

en notant bien que $y > 0$, ce qui légitime de former $\frac{1}{y}$. On pose $X = e^x$, de sorte que $e^{-x} = \frac{1}{X}$, et l'équation devient

$$X + \frac{1}{X} = \frac{1}{y},$$

d'inconnue $X > 0$. Or :

$$X + \frac{1}{X} = \frac{1}{y} \iff X^2 - \frac{1}{y} \times X + 1 + 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{y^2} - 4 = \frac{1-4y^2}{y^2}$. Puisqu'on a fixé $y \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $y^2 \leqslant \frac{1}{4}$ et $1 - 4y^2 \geqslant 0$, ainsi $\Delta \geqslant 0$, et donc on a deux racines possibles :

$$X_1 = \frac{\frac{1}{y} - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\frac{1}{y} + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{avec} \quad \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{1-4y^2}}{y}.$$

Il faut écarter une des deux racines, mais laquelle ? On veut $x \geqslant 0$, donc $X = e^x \geqslant 1$. Puisque $X_1 < X_2$ clairement, on pense que $X_1 < 1 \leqslant X_2$, mais il faut le montrer. Puisque $\sqrt{\Delta} \geqslant 0$, on a :

$$X_2 \geqslant \frac{1}{2y},$$

or $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2y} \geqslant 1$, d'où par transitivité $X_2 \geqslant 1$.

A ce stade, les adeptes de la rigueur vous diront que ce n'est pas fini : on a validé une des deux solutions, mais on n'a pas écarté l'autre. Ceci dit, puisqu'on a raisonné par équivalence, et qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution, alors X_1 doit être écarter. Vérifions tout de même que $X_1 < 1$ en partant de la fin :

$$X_1 < 1 \iff \frac{1}{y} - \sqrt{\Delta} < 2 \iff 1 - \sqrt{1-4y^2} < 2y \iff 1 - 2y < \sqrt{1-4y^2}$$

Puisque toutes les quantités sont positives, on peut mettre au carré, et

$$X_1 < 1 \iff (1-2y)^2 < 1 - 4y^2 \iff 8y^2 - 4y < 0 \iff y(2y-1) < 0$$

ce qui est vrai car $y > 0$ et $y < \frac{1}{2}$, ce qui implique $2y - 1 < 0$.

Ainsi, on a $X_1 < 1$, et on a une seule solution, $X_2 = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ puis

$$y = f(x) \iff x = \ln X_2 = \ln(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}).$$

L'unicité de la solution confirme que la fonction $g : [0, +\infty[\to]0, \frac{1}{2}]$ est bijective, et que sa réciproque est donnée par $g^{-1} :]0, \frac{1}{2}] \to [0, +\infty[$, avec $g^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}\right)$.

Exercice 4 - Deux méthodes pour des racines carrées.

1. On met le second membre ω sous forme exponentielle :

$$\omega = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On sait alors que l'équation $z^2 = \omega$ a deux solutions, que l'on obtient sous forme exponentielle :

$$z = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

2. On cherche la solution sous sa forme algébrique : $z = a + ib$. On a alors

$$z^2 = \omega \iff a^2 + 2iab - b^2 = 1 + i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}.$$

On ne se précipite pas sur le système, mais on ajoute un ingrédient en utilisant le module : si z est solution, alors

$$|z^2| = |w| \iff a^2 + b^2 = \sqrt{2}.$$

Pour résumer :

$$z = a + ib \text{ est solution ssi } \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Les lignes 1 et 3 du systèmes donnent rapidement, en les ajoutant puis en les soustrayant :

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

La ligne 2 du système indique que a et b sont de même signe, d'où les solutions (opposées) :

$$z_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1 = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}.$$

3. Par identification des solutions sous leurs formes exponentielles et algébriques :

$$\sqrt{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, et c'est la première alternative qui est la bonne, et on a

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{3/4}}.$$

On peut mettre cela sous une forme plus esthétique :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

On déduit de la même manière

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

A ce stade il est bon de vérifier que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, ce n'est pas une preuve mais c'est rassurant.

Exercice 5 - Quelques calculs de sommes (questions indépendantes).

1. (Différentes sommes avec des coefficients binomiaux)

a. On reconnait un binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

b. On écrit cette somme double comme une somme de sommes :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j \quad \text{d'après la question précédente.}$$

On reconnait une somme géométrique, on a donc

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

c. On applique le binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

On primitive de part et d'autre, en pensant à mettre une constante :

$$\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1} + C = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1}.$$

On obtient la constante en évaluant en $x = 0$:

$$\frac{1}{n+1} + C = 0 \iff C = -\frac{1}{n+1}.$$

La somme désirée s'obtient en évaluant en $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1).$$

2. En suivant les méthodes du cours, on trouve :

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3).$$

On déduit après calcul de primitive, on a $\int_0^\pi \cos 4x \,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_0^\pi \cos 2x \,\mathrm{d}x = 0$ et donc :

$$\int_0^\pi \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{3}.$$

3. **a.** En suivant les méthodes du cours, on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}.$$

b. On déduit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}.$$

On identifie un télescopage à deux crans. Comment calculer proprement ? On peut par exemple écrire $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$ et reconnaître deux télescopages. Voyons cette option :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right) \quad \text{par télescopage} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

Une autre option aurait été de couper la somme en deux puis effectuer le changement d'indice $p+1 = k+3$ dans la deuxième somme pour reproduire la preuve du télescopage.

Exercice 6 - Triangle rectangle isocèle.

1. Soit A, B et C trois points distincts du plan, d'affixe respectives les nombres complexes a, b et c. On suppose que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

2. On a

$$|\frac{c-a}{b-a}| = \frac{AC}{AB} = 1,$$

puisque le triangle est isocèle.

D'autre part, on a

$$\arg(\frac{c-a}{b-a}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) \ [2\pi]$$

et donc

$$\arg(\frac{c-a}{b-a}) = \pm\frac{\pi}{2},$$

selon que le triangle soit direct ou indirect.

3. D'après la question précédente, on a
$$\frac{c-a}{b-a} = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i,$$
D'où
$$c = a \pm i(b-a).$$

4. D'après les questions précédentes, on doit résoudre les deux équations
$$\begin{aligned} & \frac{2z-i}{iz-i} = i \quad \text{ou} \quad \frac{2z-i}{iz-i} = -i \\ \Longleftrightarrow\ & 2z-i = i(iz-i) \quad \text{ou} \quad 2z-i = -i(zz-i) \\ \Longleftrightarrow\ & z = -1+i \quad \text{ou} \quad z = \frac{1+i}{3} \end{aligned}$$
Après calculs, on trouve deux solutions : $-1+i$ et $\frac{1+i}{3}$.