DST 3
Corrige

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Merci de rendre les exercices 1, 2 et 3 sur une copie, et les exercices 4 et 5 sur autre copie indépendante.

Exercice 1 - Une approximation de Arcsin**.**

1. **a.** On va étudier les différences $D_1(x) = \mathrm{Arcsin}\, x - x$ et $D_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arcsin}\, x$. Ces deux fonctions sont bien définies sur $[0,1[$, dérivables. On a

$$D_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Or on a :

$$x \in [0,1[\implies 0 \leqslant x^2 < 1 \implies -1 < -x^2 \leqslant 0 \implies 0 < 1-x^2 \leqslant 1 \implies 0 < \sqrt{1-x^2} \leqslant 1.$$

et donc

$$x \in [0,1[\implies \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 1 \iff D_1'(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction D_1 est croissante sur $[0,1[$. Puisque $D_1(0) = 0$, la fonction D_1 est positive, ce qui donne :

$$\forall x \in [0,1[, \quad x \leqslant \mathrm{Arcsin}\, x.$$

Il reste à montrer l'autre inégalité, à l'aide de la fonction D_2. Commençons par dériver. On pose $v(x) = \sqrt{1-x^2}$, et on a $v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, puis après calculs :

$$D_2'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$

Ainsi, on a $D_2' \geqslant 0$ sur $[0,1[$. Donc D_2 est croissante, et puisque $D_2(0) = 0$, on conclut comme ci-dessus.

b. On évalue l'encadrement en $\frac{4}{5}$

2. **a.** La fonction f est définie sur

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{1-x^2} \neq 0\} =]-1,1[.$$

b. On a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -f(x),$$

ce qui prouve que f est impaire.

c. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, de plus, un calcul de dérivée (voir questions précédentes) donne

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} > 0,$$

et donc la fonction f est strictement croissante.

d. On a par un calcul de limites sandard (pas de FI) :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$$

Ainsi, puisque la fonction f est strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $\mathcal{D}$ dans $J = \mathbb{R}$.

e. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Sans utiliser une expression de f^{-1} :

(i) La fonction f est dérivable, de plus pour $x \in]-1,1[$, on a $f'(x) \neq 0$, cela suffit à affirmer que $(f^{-1})'$ est dérivable sur $J = \mathbb{R}$.

(ii) On vérifie que $f(\frac{3}{5}) = \frac{3}{4}$, ce qui prouve que $f^{-1}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{5}$. On calcule ensuite la dérivée avec la formule du cours et on déduit l'équation de la tangente

f. On fixe $y \in J \cap [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$, et on résout

$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \iff y\sqrt{1-x^2} = x \implies y^2(1-x^2) = x^2 \iff x^2(1+y^2) = y^2 \iff x = \pm\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Or on a $y \geqslant 0$ et donc $\sqrt{y^2} = |y| = y$, de plus puisque $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, on a aussi $x \geqslant 0$, finalement :

$$x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

ce qui prouve que f^{-1} vérifie

$$\forall y \in [0,+\infty[: \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Exercice 2 - Somme de carrés. Soit $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f : (p,q) \mapsto p^2+q^2$.

1. On a $(p,q) \in f^{-1}(\{0\}) \iff p^2+q^2 = 0$. Or la somme de deux nombres positifs sont nuls si et seulement si chacun est nul, d'où $p^2 = q^2 = 0$ puis $p = q = 0$. Finalement :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}.$$

2. On remarque que $f(1,0) = 1 = f(0,1)$, donc f n'est pas injective.

3. Il faut intuiter que certains nombres ne sont pas somme de carrés, et autant chercher des petites valeurs. Il est clair que 0, 1 et 2 ont un antécédant par f. Cherchons si 3 a des antécécents par f. Supposons que

$$p^2+q^2 = 3, \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } q \in \mathbb{N}$$

Si $p^2 = 0$ ou $p^2 = 1$, on aurait $q^2 = 3$ ou $q^2 = 2$, ce qui est impossible pour $q \in \mathbb{N}$. C'est donc que $p^2 = 2$ ou $p^2 = 3$, ce qui est aussi impossible. Donc 3 n'a pas d'antécédant, et f n'est pas injective.

4. Soient N_1 et N_2 dans $\operatorname{Im} f$, autrement dit des entiers qui sont somme de deux carrés,

$$N_1 = f(p_1,q_1) = p_1^2+q_1^2 \quad \text{et} \quad N_2 = f(p_2,q_2) = p_2^2+q_2^2.$$

On a alors

$$N_1N_2 = (p_1^2+q_1^2)\times(p_2^2+q_2^2).$$

Si on développe frontalement, on n'y voit plus rien.

Comme suggéré par l'énoncé, on reconnait des modules, quitte à passer par les complexes. Introduisons

$$z_1 = p_1+iq_1 \quad \text{et} \quad z_2 = p_2+iq_2,$$

On a

$$N_1N_2 = z_1\overline{z_1}\times z_2\overline{z_2} = z_1z_2\overline{z_1z_2} = |z_1z_2|^2.$$

Or
$$z_1z_2 = p_1p_2 - q_1q_2 + i(p_1q_2 + p_2q_1),$$
et donc
$$N_1N_2 = (p_1p_2 - q_1q_2)^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)^2,$$
et donc
$$N_1N_2 = f(p_1p_2 - q_1q_2, p_1q_2 + p_2q_1) \in \operatorname{Im} f$$

Exercice 3 - Une suite implicite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n : x \mapsto \sqrt{x} + n \ln x + n$.

1. La fonction f_n est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes, de plus, on a
$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$
Comme f_n est continue, alors f_n est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un unique $x \in]0, +\infty[$ tel que $f_n(x) = 0$ (tableau de variations conseillé). Ce nombre est noté u_n.

2. Il est naturel de calculer $f_n(e^{-1})$ pour situer u_n :
$$f_n(e^{-1}) = \sqrt{e^{-1}} + n \ln e^{-1} + n = \sqrt{e^{-1}} - n + n = \sqrt{e^{-1}} > 0$$
Si on avait $e^{-1} < u_n$, alors on aurait par croissance $f_n(e^{-1}) < f_n(u_n) = 0$, absurde. Donc $u_n \in]0, e^{-1}[$.

3. Pour $x \in]0, e^{-1}[$, fixé, formons $f_n(x) - f_{n+1}(x)$:
$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \sqrt{x} + n \ln x + n - \sqrt{x} + (n + 1) \ln x + n + 1) = -\ln x - 1.$$
Or, on a
$$0 < x < e^{-1} \iff \ln x < -1 \iff 0 < -\ln x - 1,$$
et donc
$$\forall x \in]0, e^{-1}[, \quad f_n(x) > f_{n+1}(x).$$
En évaluant en u_{n+1} :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_{n+1}) = 0.$$

4. Supposons par l'absurde que $u_{n+1} < u_n$, on applique la fonction f_n qui est strictement croissante :
$$f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n) = 0,$$
cela contredit la question précédente.
Donc (u_n) est croissante.
Notez que ces deux questions paraissent obscures mais sont classiques (voir TD) : d'un côté on regarde la monotonie de la suite $f_n(x)$ pour chaque x fixé, et d'un autre on exploite le fait que $f_n(u_n) = 0$.
Une autre manière de le voir est de dire que $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$, et de composer par f_n^{-1} qui est croissante, comme fonction réciproque d'une fonction croissante et continue.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par e^{-1}, donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \in]0, e^{-1}]$.

6. On pense que $\ell = e^{-1}$, par exemple parce que c'est la valeur limite de l'intervalle sur lequel les raisonnements fonctionnent. Prouvons-le : supposons par l'absurde que $\ell < e^{-1}$. On écrit alors :
$$\sqrt{u_n} + n \ln(u_n) + n = 0 \iff \sqrt{u_n} + n(\ln(u_n) + 1) = 0,$$
et on cherche à passer à la limite dans cette égalité. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) + 1 = \ln \ell + 1 < 0 \quad \text{car} \quad \ell < e^{-1}$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty} n(\ln(u_n) + 1) = -\infty,$$
puis
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} + n(\ln(u_n) + 1) = -\infty,$$
ce qui contredit $f_n(u_n) = 0$.
Donc, $\ell = e^{-1}$.

Exercice 4 - Une formule pour l'argument.

1. L'inégalité est assez claire géométiquement, montrons-la : on a pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \neq 0$:

$$x^2 < x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2},$$

Ainsi, puisque $-x \leqslant |x|$, on déduit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : -x < \sqrt{x^2+y^2} \iff 0 < x + \sqrt{x^2+y^2}.$$

2. **a.** Ici, on a $x < 0$ et $y = 0$. On doit résoudre :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|x|} < 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta \in]-\pi, \pi].$$

La réponse est $\theta = \pi$. Un simple dessin pouvait suffire.

b. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash (]-\infty, 0])$. Déjà, si $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a $x + |z| \neq 0$ d'après **Q1**, tandis que si $y = 0$ et $x > 0$, on a $x + |z| = x + |x| = 2x > 0$. Dans tous les cas, le nombre $\frac{y}{x+|z|}$ est bien défini, donc φ est bien défini, puisque Arctan est défini sur $\mathbb{R}$. De plus, comme Arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

On doit justifier que $\varphi \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ pour en calculer la tangente. Or on a

$$\varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \iff \operatorname{Arctan} \frac{y}{x+|z|} = \pm\frac{\pi}{4} \iff z \in i\mathbb{R} \quad \text{d'après l'énoncé.}$$

Ces deux cas ayant été exclus, on a bien $\varphi \in]-\pi, \pi[\backslash \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, et on peut en calculer la tangente.

c. On rappelle la formule :

$$\forall a \in]-\pi, \pi[\backslash \{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\} : \quad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a},$$

qui donne ici, avec $a = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x+|z|}$, et puisque $\tan a = \frac{y}{x+|z|}$:

$$\tan\varphi = \frac{2 \times \frac{y}{x+|z|}}{1-(\frac{y}{x+|z|})^2} = \frac{2y(x+|z|)}{(x+|z|)^2 - y^2} = \frac{2y(x+|z|)}{x^2+2x|z|+x^2+y^2-y^2} = \frac{2y(x+|z|)}{2x(x+|z|)} = \frac{y}{x}.$$

d. **(i)** En utilisant la définition de $\arg(z)$, on a $\tan(\arg(z)) = \frac{\frac{y}{|z|}}{\frac{x}{|z|}} = \frac{y}{x}$. On déduit de la résultat avec **Q2c**.

(ii) Rappelons que $x + |z| > 0$. On distingue deux cas :

- Ou bien $y > 0$, donc $\sin\theta \geqslant 0$, et alors $\theta \in]0, \pi[$. Puisque Arctan est strictement positif sur $]0, +\infty[$, on a aussi $\varphi = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x+|z|} > 0$.
- Le cas $y < 0$ amène à la même conclusion

(iii) D'après **Q2f(i)**, on a $\varphi \equiv \arg(z)\ [\pi]$. Mais comme on l'a déjà vu, on a $\varphi \in]-\pi, \pi[$. Cela ne suffit pas à conclure, car il y a deux nombres congrus à $\arg(z)$ modulo π dans $]-\pi, \pi[$.
Si $y > 0$, on a $\varphi = \arg(z)$ ou $\varphi = \arg(z) - \pi$. Mais d'après **Q2f(ii)**, on a $\varphi > 0$, donc $\varphi = \arg(z)$. Le cas $y < 0$ amène à la même conclusion. Enfin, si $y = 0$, la formule est directe.
Donc $\varphi = \arg(z)$ dans tous les cas.

3. On fixe $x_0 < 0$, et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(y) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x_0 + \sqrt{x_0^2+y^2}}\right).$$

a. On a, en utilisant que Arctan est impaire :

$$f(-y) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{-y}{x_0+\sqrt{x_0^2+(-y)^2}}\right) = -2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x_0+\sqrt{x_0^2+y^2}}\right) = -f(y).$$

donc f est impaire.

b. On peut utiliser la méthode du conjugué, ou effectuer un produit en croix.

c. La question est plus subtile qu'on ne le croit, car $x_0 < 0$. On a

$$\lim_{y\to 0^+} \sqrt{x_0^2+y^2} - x_0 = \sqrt{x_0^2} - x_0 = |x_0| - x_0 = -2x_0 \quad \text{car} \quad x_0 < 0,$$

et donc avec la question précédente :

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{x_0 + \sqrt{x_0^2+y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-2x_0}{y} = +\infty \quad \text{car} \ -2x_0 > 0.$$

d. Par composition de limites :

$$\lim_{y\to 0^+} f(y) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

e. La fonction f étant impaire, on déduit :

$$\lim_{y\to 0^+} f(y) = -\pi.$$

Exercice 5 - Somme . On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}^k}.$$

1. On a

$$S_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}^2} + \frac{1}{\sqrt{3}^3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

puis en utilisant que $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$ on déduit l'encadrement demandé (calculs de fractions laissés au lecteur).

2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

ce qui prouve que la suite est croissante. Notez que toute somme de terme positif forme une suite croissante (sera étudié au S2).

3. On a

$$4 \leqslant k \implies 2 \leqslant \sqrt{k} \implies 2^k \leqslant \sqrt{k}^k,$$

la dernière inégalité venant du fait que $x \mapsto x^k$ est croissant pour $k > 0$.

4. C'est la formule du cours sur les somme géométriques (faisant intervenir le premier terme $\frac{1}{2^4}$, et le nombre de termes $n-4+1$) :

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=4}^{n} (\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^4 \frac{1-(\frac{1}{2})^{n-4+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(1-(\frac{1}{2})^{n-3}).$$

5. On coupe la somme en deux :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = S_3 + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}^k} = S_3 + \frac{1}{8}(1-(\frac{1}{2})^{n-3}) \leqslant S_3 + \frac{1}{8}.$$

6. La suite S_n est strictement croissante, et majorée par $S_3 + \frac{1}{8}$, donc elle d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \in]S_3, S_3 + \frac{1}{8}]$. On trouve l'encadrement demandé en combinant avec la question 1.