DST 4
Corrigé

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Calcul d'une intégrale.

1. Le polynôme $t \mapsto t^2 + 2t + 3$ a un discriminant négatif, on le met donc sous sa forme canonique :

$$t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 - 1 + 3 = (t+1)^2 + 2.$$

On écrit alors :

$$\int^x \frac{1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{(t+1)^2+2}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}(t+2)^2+1\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\frac{1}{2}(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t$$

On réalise le changement de variable $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1)$, de sorte que $u^2 = \frac{1}{2}(t+1)^2$. On a $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$, et donc

$$\int^x \frac{1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)} \frac{\sqrt{2}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}[\mathrm{Arctan}\,u]^{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

a. (i) La fonction $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ est continue sur les segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'après le théorème des bornes atteintes elle est bornée et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'elle possède un minimum et un maximum.

(ii) On a noté $f : x \mapsto \cos x + \sin x$. On peut dériver, mais il est encore plus efficace de se souvenir que l'on peut transformer cette fonction :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(x) = r\cos(x - \varphi).$$

On trouve r et φ avec les formules suivantes :

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On peut prendre $\varphi = \frac{\pi}{4}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}).$$

Il est alors direct que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $-\sqrt{2}$.

(iii) Puisque cos et sin sont positifs sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 + \cos x + \sin x \geqslant 2,$$

et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2+\cos x+\sin x}$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, l'intégrale I est bien définie.

b. Vu en cours et TD, puisqu'on vous donne les formules, le mieux est de partir de la fin et de mettre $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1+t^2}$ au même dénominateur, en utilisant $t = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$

c. Déjà, vérifions la validité du changement de variable. On a $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \implies \frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{4}]$, et puisque tan est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on peut effectuer le changement de variable associé à la fonction $\varphi : x \mapsto \tan(\frac{x}{2})$, qui est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a de plus :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \times (1 + \tan^2(\frac{x}{2})) \iff \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

On effectue le changement de variable à l'aide de la question précédente, sans oublier les bornes :

$$I = \int_0^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t.$$

On conclut avec la questions précédente :

$$I = 2\big[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\big]_0^1 = \sqrt{2}(\operatorname{Arctan}(\frac{3}{\sqrt{2}}) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2})).$$

Exercice 2 - Une égalité à l'ordre 2. Soit $[a, b]$ un intervalle réel, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. On souhaite démontrer une égalité, proche du TAF, mais à l'ordre 2 : on veut montrer que

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$

1. On a :

$$g_A(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}A.$$

Ains, on a $g_A(a) = f(b)$ si et seulement si $A = \frac{2}{(b-a)^2}(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a))$.

2. L'énoncé invite à utiliser le theorème de Rolle. On remarque $g_A(b) = f(b)$, ainsi, par construction de A, on a

$$g_A(a) = g_A(b) = f(b).$$

De plus, la fonction g_A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ car f l'est, elle vérifie donc les hypohèses du théorème de Rolle, et donc :

$$\exists x \in]a, b[,\ g_A'(c) = 0.$$

3. Il s'agit d'un simple calul de dérivée :

$$g_A'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)A = (b-x)(f''(x) - A).$$

4. Puisque $b < c$, on a avec le question précédentes :

$$g_A'(c) = 0 \iff (b-c)(f''(c) - A) = 0 \iff f''(c) = A.$$

5. L'égalité $g_A(a) = f(b)$, combinée avec la question précédente, donne :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c),$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Exercice 3 - Une équation différentielle d'ordre 1.

1. Fait en TD, on a avec une IPP

$$\int^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t = \int^x 1 \times \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$$

$$= x \operatorname{Arctan} x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{par IPP}$$
$$= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| \quad \text{car} \quad \int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$
$$= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

2. On commence par associer l'équation homogène :

$$y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

Ses solutions sont

$$y_0 : x \mapsto \lambda e^{-\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{x}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, on cherche une particulière. Par superposition, on en cherche une sous la forme $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, où y_{p_1} est solution de particulière de

$$(E_1) \ : \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$$

et y_{p_2} est solution de particulière de

$$(E_2) \ : \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{xe^x + x}.$$

Dans les deux cas, on applique la méthode de la variation de la constante, en cherchant chaque solution particulière sous la forme $y_{p_i} : x \mapsto \frac{\lambda_i(x)}{x}$. Dans les deux cas, on a

$$y_{p_i}'(x) + \frac{1}{x}y_{p_i}(x) = \frac{\lambda_i'(x)}{x} - \frac{\lambda_i(x)}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{\lambda_i(x)}{x} = \frac{\lambda_i'(x)}{x}.$$

Ainsi, y_{p_1} est solution particulière de (E_1) si et seulement si :

$$\frac{\lambda_1'(x)}{x} = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \iff \lambda_1'(x) = \operatorname{Arctan} x.$$

La question précédente fournie $\lambda_1(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ puis

$$y_{p_1}(x) = \frac{\lambda_1(x)}{x} = \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}.$$

De même, y_{p_2} est solution particulière de (E_2) si et seulement si :

$$\frac{\lambda_2'(x)}{x} = \frac{1}{xe^x + x} \iff \lambda_1'(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Il reste à déterminer $\int^x \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$, et ce n'est pas direct ! On réalise le changement $u = e^t$, qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a rapidement que $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, et donc :

$$\int^x \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \int^{e^x} \frac{1}{u+1}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int^{e^x} \frac{1}{(u+1)u}\,\mathrm{d}u.$$

Il s'agit d'une fraction rationnelle avec le dénominateur factorisé, on fait une décomposition en éléments simples (on passe les détails) :

$$\forall u > 0, \quad \frac{1}{(u+1)u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}.$$

Ainsi, on peut prendre

$$\lambda_2(x) = \int^x \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \int^{e^x} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| = x - \ln(e^x+1).$$

On conclut :

$$y_{p_2}(x) = \frac{\lambda_2(x)}{x} = 1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}.$$

On conclut par superposition : les solutions de l'équation initiale sont

$$x \mapsto y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \frac{\lambda}{x} + \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} + 1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}.$$

3. Il est direct que
$$y(1)=0 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{2} + \ln(e+1) - \frac{\pi}{4} - 1.$$

4. Traitons chaque terme séparément, en repérant les termes qui ont une limites. On a déjà
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{Arctan}(x) = 0 \text{ car } \operatorname{Arctan} \text{ est continue en } 0.$$

Le terme $\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ fait penser à un taux d'accroissement, et en effet :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} \times \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ (classique avec un taux d'accroissement).}$$

Noter qu'on pouvait aussi faire un DL si on a déjà attaqué ce chapitre.
Ensuite, il est pertinent de regrouper les termes $\frac{\lambda}{x}$ et $-\frac{\ln(e^x+1)}{x}$, car ils peuvent se compenser. On a :
$$\frac{\lambda}{x} - \frac{\ln(e^x+1)}{x} = \frac{\lambda - \ln(e^x+1)}{x}.$$

Or on a
$$\lim_{x\to 0} (\lambda - \ln(e^x+1)) = \lambda - \ln 2.$$

Ainsi :

- Si $\lambda > \ln 2$, on a $\lambda - \ln 2 < 0$ et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{x} - \frac{\ln(e^x+1)}{x} = -\infty.$$
Par somme des différentes limites :
$$\lim_{x\to 0} y(x) = -\infty.$$
- Si $\lambda > \ln 2$, on a $\lambda - \ln 2 > 0$ et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{x} - \frac{\ln(e^x+1)}{x} = +\infty.$$
Par somme des différentes limites :
$$\lim_{x\to 0} y(x) = +\infty.$$
- Si $\lambda = \ln 2$, on a une forme indeterminée. Mais il s'agit d'un taux d'accroissement, en effet, on pose $f : x \mapsto \ln(e^x+1)$, de sorte que
$$\frac{\ln(2) - \ln(e^x+1)}{x} = -\frac{f(x) - f(0)}{x}$$
et donc, puisque f est dérivable en sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, on déduit
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2) - \ln(e^x+1)}{x} = -f'(0) = -\frac{1}{2}.$$
On pouvait aussi utiliser des DLs si on a vu ce chapitre.
En conclusion, par somme des différentes limites :
$$\lim_{x\to 0} y(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 - Une équation différentielle d'ordre 2.

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

On associe l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$. Ses racines sont 2 et 3, ainsi les solutions homogènes sont
$$y_0(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Par superpositon, on cherchons une solution y_{p_1} de

$$y'' - 5y' + 6y = x^2$$

et une solution y_{p_2} de

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

Pour la première, on cherche y_{p_1} sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y_{p_1}(x) = ax^2 + b + c$. On injecte, on identifie, et les caculs conduisent à

$$y_{p_1}(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

Pour y_{p_2}, on remarque que $x \mapsto e^{2x}$ est solution de l'équation homogène (cas résonant), on doit donc monter en degré et chercher y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(x) = \alpha x e^{2x}$. On injecte et on identifie, les calculs conduisent à $\alpha = -1$, et donc

$$y_{p_3}(x) = -xe^{2x}.$$

D'après le théorème de superposition, les solutions sont

$$y : x \mapsto y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108} - xe^{2x}, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 5 - Etude d'une fonction et d'une suite récurrente associée.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{Arctan}(\frac{2}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. **a.** On détermine la limite en 0, à droite. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{Arctan}(\frac{2}{x}) = \lim_{X\to+\infty} \mathrm{Arctan}(X) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, et donc la fonction f est continue en 0.

b. Déjà, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que composée. Il reste à montrer que f est dérivable en 0, et que f' y est continue. On peut le faire à la main, mais le théorème de la limite de la dérivée permet d'avoir le résultat rapidement. On a

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{1 + (\frac{2}{x})^2} = -\frac{2}{x^2 + 4}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2},$$

Comme f est continue en 0, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

c. La fonction Arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{2}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, ainsi, par composée, f est décroissante sur $]0, +\infty[$, et donc sur $[0, +\infty[$ puisqu'elle est continue en 0.

On pouvait bien sûr se servir de calcul de la dérivée.

d. Puisque f est déroissante et continue, on a à l'aide du TVI : $f([\frac{1}{2}, 2]) = [f(2), f(\frac{1}{2})]$ (s'aider d'un tableau de variation). Or on a

$$f(2) = \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(\frac{1}{2}) = \mathrm{Arctan}(4) < \frac{\pi}{2} < \frac{4}{2} = 2 \ \text{ car Arctan est à valeurs dans }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Ainsi, $f([\frac{1}{2}, 2]) \subset [\frac{1}{2}, 2]$.

e. Il est direct que la fonction g est décroissante, comme somme de fonction décroissantes. De plus, $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \geqslant 0$ et $g(2) = f(2) - 2 \leqslant 0$, où on a utilisé la question précédente. D'après le TVI, la fonction g s'annule sur $[\frac{1}{2}, 2]$:

$$\exists \ell \in [\frac{1}{2}, 2], \quad g(\ell) = 0 \iff f(\ell) = \ell.$$

2. On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

a. On a montré à la **Q51d)** que l'intervalle $[\frac{1}{2}, 2]$ est stable par f, on déduit le résultat par récurrence directe.

b. Il vaut mieux l'avoir déjà vu, c'est une application direct de l'IAF : on a $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$. On cherche à majorer $|f'|$ sur $[\frac{1}{2}, 2]$. On a trouvé que $|f'(x)| = |\frac{2}{x^2+4}| = \frac{2}{x^2+4}$. Cette fonction étant décroissante sur $[\frac{1}{2}, 2]$, on a :

$$\forall x \in [\tfrac{1}{2}, 2], \quad |f'(x)| = \frac{2}{x^2+4} \leqslant \frac{2}{(\frac{1}{2})^2 + 4} = \frac{8}{17}.$$

Ainsi, par application de l'IAF :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{8}{17}|u_n - \ell|.$$

c. Par une récurrence standard, on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell|(\frac{8}{17})^n|u_0 - \ell|.$$

Or, $u_0 = \frac{1}{2}$, et puisque $\ell \in [\frac{1}{2}, 2]$, on a $|u_0 - \ell| \leqslant 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On déduit l'inégalité demandée.

d. Puisque $-1 < \frac{8}{17} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\frac{8}{17})^n = 0$. Par encadrement, la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 6 - Un système linéaire.

1. Après échelonnement (on passe les détails), le système devient :

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = a \\ \qquad y - 2z = -\frac{a}{5} + \frac{b}{5} \\ 0 = -2a - 5b + c \end{cases}$$

Ainsi, si $-2a - 5b + c \neq 0$, le système est incompatible, et n'admet pas de solutions.
Si $-2a - 5b + c = 0$, il en admet une infinité.

2. On reprend le système obtenu à la question précédente :

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 0 \\ \qquad y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On exprime par exemple x et y en fonction de z : le système est équivalent à

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(-z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$, c'est la droite de vecteur directeur $(-1, 2, 1)$.