DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Développements limités (deux exercices indépendants).

1. **a.** **(i)** Montrer que la fonction tan admet en 0 le développement limité :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

(ii) Donner l'équation de la tangente à la courbe de tan en 0, ainsi que sa position relative à la courbe. Esquisser le graphe de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b. Soit la fonction $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$.

(i) Montrer que f admet un DL à l'ordre 1 en 0, que l'on calculera.

(ii) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et préciser la valeur en 0.

(iii) Montrer que ce prolongement est dérivable, donner la valeur de la dérivée en 0, et donner l'équation de la tangente à l'origine.

(iv) (Bonus) Donner le DL de $x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 5, puis donner la position relative de la fonction f prolongée et de sa tangente à l'origine.

2. Donner un équivalent simple de $x \mapsto \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^5}$ en 0.

3. Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^3} \times \ln(1 + \frac{2}{x})$.

a. Montrer que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner son équation.

b. Préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 - Espaces vectoriels (quatre exercices indépendants).

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère les sous-ensembles suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ -2x + 2y + z + t = 0 \\ x + 5y - z - 6t = 0 \end{array}\right.\right\}, \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x - y + z + 3t = 0\}.$$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

b. Même question pour G.

c. Montrer que $F \subset G$. Que vaut $F + G$?

d. (Question indépendante). Soit $H = \mathrm{Vect}((1,2,3,1);(3,2,1,1))$. Donner une ou des équations caractérisant H.

e. Soit $e = (1,0,0,0)$. Montrer en revenant à la définition que $E = G \bigoplus \mathrm{Vect}(e)$.

f. Montrer que $E = G \bigoplus \mathrm{Vect}(e)$ en utilisant le théorème « dimension et supplémentaire » (voir à la fin de l'exercice).

2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit $F = \mathrm{Vect}(X^3 + X^2 + X + 2; X^2 - 2X - 1)$ et $G = \{P \in E,\ P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$.

a. Montrer que $(X^3 + X + 2, X^2 - 2X - 1)$ est une base de F.

b. A-t-on $X^3 + X + 1 \in F$?

c. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

d. **(i)** Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$, puis donner $\dim(\mathbb{R}_3[X])$, telle que définie dans le théorème « dimension et supplémentaire » (voir à la fin de l'exercice).

(ii) En utilisant le théorème « dimension et supplémentaire » (voir à la fin de l'exercice), montrer que $E = F \bigoplus G$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2, et soit $F = \{M \in E \mid AM = 0\}$.

a. En donnant des équations vérifiées par les coefficients de $M \in F$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

b. Soit $G = \mathrm{Vect}(I_2)$, déterminer $F \cap G$. Qu'en déduire ?

4. Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, et soit $F = \{f \in E,\ f'(-1) = f'(1)\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Soit $g \in E$, fixé mais quelconque. Supposons qu'il existe $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) + \lambda x^2.$$

Donner alors la valeur de λ en fonction de $g'(1)$ et $g'(-1)$.

c. Posons $h : x \mapsto x^2$. Montrer que $E = F \bigoplus \mathrm{Vect}(h)$.

On pourra utiliser le résultat suivant lorsque l'énoncé le mentionne :

Théorème : Lien entre dimension et supplémentaire :

La dimension d'un espace vectoriel E, notée $\dim(E)$, est le nombre d'éléments dans une base de E. On admet le résultat suivant : si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E avec les deux conditions : $\begin{cases} \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$, alors on a : $E = F \bigoplus G$.

Exercice 3 - Un petit peu de géométrie.

1. Soit $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 10y = 10\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle et donner ses éléments caractéristiques.

2. Vérifier que $B(-1 + 3\sqrt{3}; 2) \in \mathscr{C}$. Donner l'équation de la droite tangente à $\mathscr{C}$, en B.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$, un paramètre, et soient $P(1; 2 + k)$ et $Q(-1; -2 + k)$, deux points du plan.

a. Donner une équation cartésienne de la droite (PQ).

b. Donner le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et (PQ), en discutant selon les valeur de $k \in \mathbb{R}$ (il n'est pas nécessaire de calculer explicitement les points d'intersection).