DST 6

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Deux questions de cours.

1. Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
   - **a.** Montrer que $\ker(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - **b.** Montrer que $\ker(u) = \{0\}$ si et seulement si u est injective.
2. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$, montrer que $E = \ker(p) \bigoplus \operatorname{Im}(p)$. Comment appelle-t-on p ?

Exercice 2 - Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, 3x - 2y - 4z, -2x + y + 3z).$$

On sait que ce type de fonction est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$.
2. Donner une base et la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 3 - Une forme linéaire avec la trace.

On appelle *trace* d'une matrice, notée tr, la somme de ses coefficients diagonaux. Par exemple :

$$\operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}) = 1 + 4 = 5.$$

On admet (et c'est facile à prouver) que la fonction $\operatorname{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, et on considère la fonction $u : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$u : M \mapsto \operatorname{tr}(AM).$$

1.
   - **a.** Montrer que u est une application linéaire.
   - **b.** Déterminer une base ainsi que la dimension de $\ker(u)$.
   - **c.** En déduire que u est une application surjective.
   - **d.** Déterminer un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

2. Pour un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $v : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ par
$$v(M) = \alpha M + M^T.$$

a. Montrer que v est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

b. Dans ces questions, on fixe $\alpha = -1$

(i) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(v)$, ainsi que sa dimension.

(ii) Déterminer une base de $\ker(v)$, ainsi que sa dimension. Reconnaissez-vous $\ker(v)$?

(iii) Montrer que $E = \ker(v) \bigoplus \mathrm{Im}(v)$. La fonction v est-elle un projecteur ?

c. Montrer que v est bijective si et seulement si $\alpha \notin \{-1, 1\}$, et que v^{-1} vérifie
$$v^{-1} : N \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}(-\alpha N + N^T).$$

d. Résoudre l'équation $v(M) = A$, d'inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$. On distinguera selon les valeurs de α.

Exercice 4 - Un endomorphisme de polynômes.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et soit u la fonction définie sur E par
$$u : P \mapsto (2X^3 - X)P''' - X^2 P'' - 6P.$$

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}_3[X]$

a. Montrer que u est un endomorphisme de E.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, par transport d'une base de E.

c. En déduire la dimension de $\ker(u)$, puis donner une base de $\ker(u)$.

d. Les sous-espace vectoriel $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

2. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$. Il est clair d'après ce qui précède que u est un endomorphisme de E.

a. Soit $P \in \ker(u)$, si $P \neq 0$, notons $n \in \mathbb{N}$ son degré. En raisonnant sur le coefficient dominant, montrer que n vérifie l'équation
$$2n^3 - 7n^2 + 5n - 6 = 0.$$

b. Décomposer le polynôme $2X^3 - 7X^2 + 5X - 6$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ (les questions précédentes suggèrent que 3 pourrait être une racine). Dans chaque cas, préciser s'il est scindé.

c. En déduire $\ker(u)$.

d. (Dur). Déduire des questions précédentes que l'équation $u(Q) = X^3 - X$, d'inconnue $Q \in E$, n'admet pas de solution.

Exercice 5 - Quatre petits exercices de calculs effectifs indépendants chez les polynômes.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$$f : x \mapsto \frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x^2+1)}.$$

a. Déterminer deux polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{(x-2)(x^2+1)}.$$

b. Trouver des constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad f(x) = E(x) + \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

c. Montrer que f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique dont on précisera l'équation et la position relative par rapport à la courbe de f.

2. Soit la fonction réelle définie par $g : x \mapsto \frac{1}{x^3+3x^2+2x}$. Donner son ensemble de définition le plus grand possible, puis donner une primitive de g.

3. Soit le polynôme $(1 + X)^4 - X^4$.

a. Quel est son degré ? Justifier sans calcul qu'il admet au moins une racine réelle.

b. Factoriser en produit de facteurs irreductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

4. Déterminer, si elle existe :
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - x^3 - 14x^2 + 36x - 24}{(x-2)^2}.$$