DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 8 exercices indépendants.

Exercice 1 - Un calcul de puissance. Calculer $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2})^8$.

Exercice 2 - Une « parabole tangente ».

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x.$$
2. Sur un même graphe, tracer les courbes des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 3 - Image du cercle par une homographie. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, on a :
$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 4 - Un peu de géomérie. Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1+3i\}$ tels que
$$\left|\frac{z-1+2i}{z+1-3i}\right| = 1.$$
On dessinera cet ensemble dans le plan complexe.
2. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{1-2i, -1+3i\}$, même question avec l'équation
$$\arg(\frac{z-1+2i}{z+1-3i}) = \pi$$
3. **a.** Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Rappeler la nature de l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z-a| = r$. Vous justifierez la réponse avec vos mots.
   b. Trouver un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (1-i)z + 2 + i = (1-i)(z-a).$$
   c. En déduire quel est l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie
$$|(1-i)z + 2 + i| = 1.$$
4. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Déterminer une équation de degré 2 sur $z \in \mathbb{C}$ pour que les points d'affixe z, z^2 et $2+2i$ forment un triangle rectangle isocèle en z. Combien de nombres complexes vérifient cette condition ?
Bonus : résoudre cette équation et trouver les complexes z vérifiant cette condition.

Exercice 5 - Maîtriser les puissances trigos.

1. **a.** Linéariser $\sin^4(x)$.
   b. En déduire une primitive de $\sin^4 x$.
2. **a.** (Question de cours). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x + i\sin x)^n = (\cos(nx) + i\sin(nx)).$$
   b. En déduire $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.
   c. Donner la valeur de $\sin(\frac{\pi}{5})$ (on pourra au préalable montrer que $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour distinguer parmi les valeurs possibles trouvées).

Exercice 6 - En passant par les racines n-ièmes.

1. (Question préliminaire). Pour $x \in]0,\pi[$, on définit la cotangente de x par la formule
$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$
Montrer qu'on définit bien une fonction sur $]0,\pi[$, calculer sa dérivée et montrer qu'elle est strictement décroissante. L'esquisser.
2. (Question de cours). Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que les solutions de l'équation
$$X^n = 1, \tag{1}$$
d'inconnue $X \in \mathbb{C}$, sont exactement les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [|0, n-1|]$. On pourra chercher X sous forme exponentielle.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On s'intéresse à l'équation
$$(z+i)^n = (z-i)^n, \tag{2}$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   a. Résoudre l'équation lorsque $n = 2$.
   b. On revient au cas général. En considérant le module de l'équation précédente, montrer que les solutions sont toutes réelles. Le nombre 0 est-il solution ?
   c. Lorsque $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, montrer que z est solution de (2) si et seulement si $\frac{z+i}{z-i}$ est solution de l'équation (1).
   d. En déduire que z est solution de (2) si et seulemet si il existe un entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que
$$z + i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i).$$
   e. En déduire que z est solution de (2) si et seulemet si il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que
$$z = \cot(\frac{k\pi}{n}).$$
   (On aura noté que l'indice k ne démarre plus à zéro).
   f. En se servant de la question préliminaire, donner le nombre de solutions de l'équation (2). Les expliciter lorsque $n = 4$.

Exercice 7 - Equation à paramètre.

1. (Question préliminaire) Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{\sin^4\theta + 4\cos^2\theta} = 1 + \cos^2\theta.$$
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + (2i\sin\theta)z - 2i\cos\theta = 0.$$

Exercice 8 - Sommes géométriques et leurs copines. Le but de l'exercice est de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$, les sommes
$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k \text{ et } S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2x^k.$$

1. Donner les valeurs de $S_0(1)$, $S_1(1)$ et $S_2(1)$.
2. (Question de cours) En formant $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \quad S_0(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
3. En dérivant, calculer pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, puis déduire $S_1(x)$.
4. Proposer une méthode pour déterminer $S_2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (il n'est pas nécessaire d'aller au bout des calculs).