DST 3
Corrigé

Exercice 1 - Calculs de sommes.

1. a. Afin de déterminer les réels a, b et c, mettons au même dénominateur :

$$\frac{a}{k+2}+\frac{b}{k+3}+\frac{c}{k+4}=\frac{a(k+3)(k+4)+b(k+2)(k+4)+c(k+2)(k+3)}{(k+2)(k+3)(k+4)}.$$

Ainsi, on a l'égalité demandée si et seulement si

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad a(k+3)(k+4)+b(k+2)(k+4)+c(k+2)(k+3)=4k+10.$$

Or on a

$$a(k+3)(k+4)+b(k+2)(k+4)+c(k+2)(k+3)=(a+b+c)k^2+(7a+6b+5c)k+12a+8b+6c.$$

Ainsi, par idenfification des coefficients, on a l'égalité demandée lorsque

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 7a+6b+5c=4 \\ 12a+8b+6c=10 \end{array}\right. .$$

La résolution de ce système conduit à

$$a=1,\quad b=2,\quad \text{et}\quad c=-3.$$

b. On écrit, à l'aide de la question précédente :

$$\frac{4k+10}{(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{k+2}+\frac{2}{k+3}-\frac{3}{k+4}=\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}+3\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right).$$

Ainsi on a par linéarité :

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right).$$

On reconnait deux sommes télescopiques, et on déduit que

$$T_n=\frac{1}{1+2}-\frac{1}{n+3}+3\left(\frac{1}{1+3}-\frac{1}{n+4}\right)=\frac{13}{12}-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{n+4}.$$

2. a. On a vu que

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b. On transforme cette somme triangulaire en une somme double :

$$U_n=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{2j+1}.$$

Or pour un entier j fixé entre 1 et n, on a

$$\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{2j+1}=\frac{1}{2j+1}\sum_{i=1}^{j}i^2=\frac{1}{2j+1}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}=\frac{j(j+1)}{6}.$$

On déduit que

$$U_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j) = \frac{1}{6}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

On peut réduire cette expression :

$$U_n = \frac{n(n+1)}{12}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{36} = \frac{n(n+1)(n+2)}{18}.$$

Exercice 2 - Deux suites.

Partie 1

1. On constate que la suite (u_n) est strictement positive, et puisque (u_n) est définie comme un quotient, on peut former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ afin de le comparer avec 1. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = 3\frac{n}{n+1}.$$

Or on a pour $n \geqslant 1$ que $2n \geqslant n+1$ et donc $\frac{n}{n+1} \geqslant \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. cela prouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2. On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_N \geqslant A$. Or on a

$$u_N \geqslant A \iff \frac{3^N}{N} \geqslant A \iff 3^N \geqslant A \times N.$$

Puisque la fonction ln est croissante, et que sa réciproque exp l'est aussi, on a alors :

$$u_N \geqslant A \iff \ln(3^N) \geqslant \ln(A \times N) \iff N\ln 3 \geqslant \ln A + \ln N.$$

Il ne semble pas possible de résoudre cette inéquation de manière exacte, mais on peut utiliser l'indication de l'énoncé :

$$\ln N \leqslant N$$

et donc

$$\ln N + \ln A \leqslant N + \ln A.$$

Ainsi, si on a $N + \ln A \leqslant N\ln 3$, on a l'inégalité voulue. Cela a lieu dès que $\ln A \leqslant N(\ln(3)-1)$, et comme $3 > e$, on a $\ln 3 - 1 > 0$, et ce qui précède cela est équivalent à

$$N \geqslant \frac{\ln A}{\ln 3 - 1}.$$

Si $A \in]0,1]$, cela a toujours lieu, tandis que si $A > 1$, on pose $N_A = \left\lfloor \frac{\ln A}{\ln 3 - 1}\right\rfloor + 1$, qui est le premier entier strictement plus grand que $\frac{\ln A}{\ln 3-1}$. D'après ce qui précède on a bien

$$u_{N_A} \geqslant A.$$

3. Soit $A > 0$, d'après la question précédente, il existe un rang $N_A \in \mathbb{N}^*$ tels que $u_{N_A} \geqslant A$. Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc on a

$$\forall n \geqslant N_A, \quad u_n \geqslant u_{N_A} \geqslant A.$$

On a finalement démontré que

$$\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n, \quad u_n \geqslant A.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie 2

On commence par résoudre l'équation

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 1$$

qui a pour unique solution $\ell = 2$. On soustrait ensuite les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \\ \ell = \dfrac{1}{2}\ell + 1 \end{cases}$$

et on obtient

$$u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2).$$

On forme ensuite la suite auxiliaire

$$v_n = u_n - \ell.$$

D'après ce qui précède, on a donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n,$$

et donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -2$. On déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -2(\frac{1}{2})^n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

On déduit une forme explicite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$:

$$u_n = v_n + 2 = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Exercice 3 - Une inégalité de puissances. Notons que les quantités en jeu sont bien définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on a par définition d'une puissance

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2^{x^2} < 4^x \iff e^{x^2 \ln 2} < e^{x \ln 4} \iff x^2 \ln 2 < x \ln 4.$$

Or $\ln 4 = 2\ln 2$, et $\ln 2 > 0$, donc on peut tout diviser par $\ln 2$, et on a

$$2^{x^2} < 4^x \iff x^2 < 2x \iff x(x-2) < 0 \iff x \in]0, 2[,$$

la dernière équivalence résultant d'une étude de signe standard.

Exercice 4 - Autour de Arctan **et** exp**.**

Partie 1

1. On a pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -f(x).$$
Cela prouve que f est impaire.

2. La fonction f est continue et dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas. On calcule la dérivée de f :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$
Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0.$$
et donc la fonction f est strictement croissante.
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Ainsi, la limite en $-\infty$ de f n'est pas une forme indertminée :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-1}{1} = -1.$$
Puisque la fonction est impaire, on déduit la limite en $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$
<u>Remarque</u> : On pouvait écrire
$$f(x) = \frac{e^x+1-2}{e^x+1} = 1 - \frac{2}{e^x+1},$$
et déduire que f est strictement croissante sans caluler la dérivée. Noter également que cette forme de f permet un calul de dérivée plus rapide.

3. On sait que l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est
$$y = f'(0)(x-0) + f(0).$$
Or, en utilisant le calcul de dérivée précédent, on obtient
$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$
Ainsi l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est
$$y = \frac{1}{2}x.$$

4. Introduisons la fonction différence $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$D(x) = \frac{1}{2}x - f(x).$$
On va montrer que $D \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$ par une étude de fonction. On a d'après ce qui précède :
$$D'(x) = \frac{1}{2} - f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{2(e^x+1)^2}.$$
Or
$$(e^x+1)^2 - 4e^x = e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x = e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x-1)^2.$$
Ainsi, on a
$$\forall x \geqslant 0, \quad D'(x) \geqslant 0,$$
et donc la fonction D est croissante. Or $D(0) = 0$, et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad D(x) \geqslant D(0) = 0$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant \frac{1}{2}x.$$

5. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. On a vu que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

On déduit que $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$, et donc f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $]-1,1[$. De plus, on a vu que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on déduit donc que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition.

6. Pour déterminer explicitement f^{-1}, on se donne $y \in]-1,1[$, et on résout l'équation

$$y = f(x), \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &\iff (e^x + 1)y = e^x - 1 \\ &\iff e^x(y-1) = -y - 1 \\ &\iff e^x = \frac{1+y}{1-y}. \end{aligned}$$

Or puisque $y \in]-1,1[$, on a $\frac{1+y}{1-y} > 0$, et donc :

$$y = f(x) \iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Cela prouve que la fonction f^{-1} vérifie :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

7. On a vu que que $f(0) = 0$, et donc $f^{-1}(0) = 0$. Or on sait que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Notez que l'on pouvait aussi dériver la fonction f^{-1} par sa forme explicite, et retrouver cette valeur.

Partie 2

1. La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, et f aussi, donc on peut définir la composée $g : x \mapsto \mathrm{Arctan}(f(x))$ sur $\mathbb{R}$.

2. En tant que composée de fonctions dérivables, la fonction g est dérivable, et on applique la formule donnant la dérivée d'une composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2(1 + \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2})} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2 + (e^x-1)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

3. La fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a vu que f l'est aussi, donc par composition de fonctions strictement croissantes, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a de plus $\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Or a vu que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Donc par composition de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \mathrm{Arctan}(-1) = \frac{\pi}{4}.$$

4. D'après la question précédente, en utilisant le thorème de la bijection, on constate que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, et donc, puisque $\frac{\pi}{6} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, l'équation $g(x) = \frac{\pi}{6}$ a une unique solution. Or on a

$$g(x) = \frac{\pi}{6} \iff \mathrm{Arctan}\, f(x) = \frac{\pi}{6}.$$

Or, par définition de la fonction Arctan, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \mathrm{Arctan}\, y = x \iff \tan(x) = y.$$

Ainsi, on a

$$\text{Arctan}\, f(x) = \frac{\pi}{6} \iff f(x) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

On utilise alors la formule trouvée pour f^{-1} :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \ln(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}).$$

On peut simplifier cette dernière écriture :

$$\ln(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}) = \ln(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}) = \ln\left(\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\right) = 2\ln(\sqrt{3}+1) - \ln 2.$$

Partie 3

1. Notons $x_0 = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}(-1)$. On sait que $\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. De plus, comme $0 < \frac{1}{2}$, on sait aussi que $0 < \text{Arctan}(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{2}$. En ajoutant $\text{Arctan}(-1)$, on obtient

$$-\frac{\pi}{4} < x_0 < \frac{\pi}{4},$$

ce qui prouve bien que $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Toujours avec la notation $x_0 = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}(-1)$, on calcule $\tan(x_0)$ avec la formule d'addition de la tangente

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Cela nous donne

$$\tan(x_0) = \frac{\frac{1}{2}-1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-1/2}{3/2} = -\frac{1}{3}.$$

De plus d'après la question précédente, on a $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or, comme on l'a déjà rappelé

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(x) = y \iff x = \text{Arctan}(y).$$

On peut donc conclure que

$$x_0 = \text{Arctan}(-\frac{1}{3}).$$

3. Supposons que x soit une solution de l'équation (ε). On a alors

$$\text{Arctan}(\frac{e^x-1}{e^x+1}) = \text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(-2e^x) \implies \frac{e^x-1}{e^x+1} = \tan\left(\text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(-2e^x)\right).$$

Or, toujours avec la formule d'addition :

$$\tan\left(\text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(-2e^x)\right) = \frac{e^x - 2e^x}{1 - e^x \times (-2e^x)} = -\frac{e^x}{1+2e^{2x}}.$$

Ainsi, si x est solution de (ε), on a

$$\begin{aligned} \frac{e^x-1}{e^x+1} = -\frac{e^x}{1+2e^{2x}} &\iff (e^x-1)(1+2e^{2x}) = -e^x(e^x+1) \\ &\iff e^x + 2e^{3x} - 1 - 2e^{2x} = -e^{2x} - e^x \\ &\iff 2e^{3x} - e^{2x} + 2e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

4. Il suffit de développer le membre de droite.

5. Puisque $e^{2x} + 1 \neq 0$, on a d'après l'égalité précédente

$$2e^{3x} - e^{2x} + 2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2.$$

A ce stade, on a montré que

$$x \text{ est solution de } (\varepsilon) \implies x = \ln\frac{1}{2}.$$

Il faut maintenant vérifier que $\ln\frac{1}{2}$ est bien solution. C'est exactement la question **2**.