DST 4
Corrigé

Exercice 1 - Une équation diférentielle d'ordre 1.

Partie I

1. Posons $a(x) = 2x$, alors les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2xy(x) = 0$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive de a. Un calcul direct fournit $A(x) = x^2$, et ainsi les solutions sont données par

$$y(x) = \lambda e^{-x^2}.$$

La condition initiale fournit de plus :

$$y(0) = 1 \iff \lambda = 1.$$

Ainsi le problème de Cauchy a une unique solution, donnée par $x \mapsto e^{-x^2}$.

2. On peut utiliser l'équation différentielle :

$$f'(x) = -2xf(x) = -2xe^{-x^2},$$

et, la fonction étant bien deux fois dérivable comme produit, on dérive une deuxième fois :

$$f''(x) = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}.$$

3. Notons que f' est impaire et négative sur $[0, +\infty[$. Ainsi, on a

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| = \max_{t\in[0,\infty[} (-f'(t)),$$

et il suffit d'étudier f' sur $[0, +\infty[$. On se ramène au signe de $x \mapsto 4x^2 - 2$ sur $[0, +\infty[$, qui s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et qui vérifie :

$$\forall x \in [0, +\infty[: \quad 4x^2 - 2 < 0 \iff x \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[, \quad \text{et} \quad 4x^2 - 2 > 0 \iff x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[.$$

En utilisant que $f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$, on déduit le tableau de variation de f' :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0

On déduit donc

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

4. **a.** La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant dérivable, on a le théorème des accroissements finis (aussi appelé égalité des accroissements finis) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \exists c \in]x,y[, \quad f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

b. En combinant les questions **Q3** et **Q4a)**, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \times |x-y| = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}|x-y|.$$

Ainsi pour avoir $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}|x-y| \leqslant \varepsilon$, on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}}$. On a alors :

$$|x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \times \eta = \varepsilon.$$

5. Nous allons montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \text{il existe } P_n \text{ un polynôme de degré } n \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}.$$

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est bien vraie avec $P_0(x) = 1$.
- Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai. Alors on dérive $f^{(n)}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = P_n'(x)e^{-x^2} - 2xP_n(x)e^{-x^2} = (P_n'(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}.$$

Ainsi, on pose $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$. On constate que P_{n+1} est un polnôme, de plus on a

$$\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n) + 1 = n+1.$$

Ainsi on a $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ceci prouve la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par le principe de récurrence.

Partie II

1. Il suffit de mettre au même dénominateur.

2. Pour commencer, on a en posant $P(x) = x^2 + 8x + 17$:

$$\int^x \frac{2t+8}{t^2+8t+17}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{P'(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t = \ln|P(x)|.$$

Le discriminant du trinôme P vaut $\Delta = 8^2 - 4\times 17 = -17 < 0$, ainsi la fonction P est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\int^x \frac{2t+8}{t^2+8t+17}\,\mathrm{d}t = \ln(x^2+8x+17).$$

Il reste à calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$. Puisque le trinôme P n'a pas de racines réelles, on exploite sa forme canonique :

$$P(x) = (x+4)^2 + 1.$$

Ainsi, on a

$$\int^x \frac{1}{t^2+8t+17}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{(t+4)^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $u = t+4$. On a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, puis

$$\int^x \frac{1}{(t+4)^2+1}\,\mathrm{d}t = \int^{x+4} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{Arctan} u]^{x+4} = \operatorname{Arctan}(x+4).$$

Finalement, on a

$$\int^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{2t+8}{t^2+8t+17}\,\mathrm{d}t + \int^x \frac{1}{t^2+8t+17}\,\mathrm{d}t = \ln(x^2+8x+17) + \operatorname{Arctan}(x+4).$$

3. Intéressons-nous à l'équation différentielle linéaire

$$y'(x) + 2xy(x) = \frac{2x+9}{x^2+8x+17}e^{-x^2} \tag{1}$$

On a déjà résolu l'équation homogène associée à la **Q1** de la partie I, et on déduit que les solutions de l'équation homogène sont de la forme
$$y_h(x) = \lambda e^{-x^2}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$
Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution sous la forme
$$y_p(x) = \lambda(x)e^{-x^2},$$
où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à trouver. On a
$$y_p'(x) = \lambda'(x)e^{-x^2} - 2x\lambda(x)e^{-x^2},$$
puis
$$y_p'(x) + 2xy_p(x) = \lambda'(x)e^{-x^2} - \cancel{2x\lambda(x)e^{-x^2}} + \cancel{2x\lambda(x)e^{-x^2}}.$$
Ainsi, y_p est solution de (1) lorsque :
$$\lambda'(x)e^{-x^2} = g(x)e^{-x^2} \iff \lambda'(x) = g(x).$$
En utilisant la question précédente, on déduit que
$$\lambda(x) = \int^x g(t)\,\mathrm{d}t = \ln(x^2 + 8x + 17) + \operatorname{Arctan}(x+4).$$
On conclut avec le théorème de superposition : les solutions de (1) sont exactement les fonctions
$$\begin{aligned} y(x) = y_h(x) + y_p(x) &= \lambda e^{-x^2} + \left(\ln(x^2+8x+17) + \operatorname{Arctan}(x+4)\right) e^{-x^2} \\ &= \left(\lambda + \ln(x^2+8x+17) + \operatorname{Arctan}(x+4)\right) e^{-x^2}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
On se sert de la condition initiale pour déterminer la constante λ : en utilisant la forme précédente, on a
$$y(-4) = (\lambda + \ln(16 - 32 + 17) + \operatorname{Arctan}(-4+4))\, e^{-16} = \lambda e^{-16},$$
puisque $\ln(1) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$.
On déduit que $\lambda = e^{16}$, et le problème de Cauchy a une unique solution.

Partie III :

1. On associe l'équation homogène
$$y'' - 2y' + y = 0.$$
Afin de résoudre cette équation, on associe l'équation caractéristique
$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$
d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. On reconnaît une identité remarquable :
$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2,$$
ainsi on a une unique racine double, $r = 1$. On déduit les solutions de l'équation homogène :
$$y_h(x) = (\lambda + \mu x)e^x, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
On cherche ensuite une solution particulière. Puisque le second membre vérifie $2\operatorname{sh} x = e^x - e^{-x}$, par superposition des solutions particulières, on cherche des solutions séparément pour les deux équations différentielles
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \tag{2}$$
et
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = -e^{-x} \tag{3}$$
Dans la première équation, le second membre est solution de l'équation homogène, laquelle a une équation caractéristique avec une racine double. Dans ce cas, on sait que l'on doit chercher la solution particulière sous la forme
$$y_1(x) = \alpha x^2 e^x, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ à trouver.}$$
On a alors
$$y_1'(x) = \alpha(2x + x^2)e^x,$$

puis
$$y_1''(x) = \alpha(2+4x+x^2)e^x.$$
Ainsi,
$$y_1''(x) - 2y_1'(x) + y_1(x) = \alpha\left(2+4x+x^2-2(2x+x^2)+x^2\right)e^x = 2\alpha e^x.$$
Ainsi, y_1 est solution de (2) si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

Il reste à résoudre (3). Ceci est plus simple car -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique. Ainsi, on cherche une solution particulière sous la forme
$$y_2(x) = \beta e^{-x}.$$
On a alors
$$y_2''(x) - 2y_2'(x) + y_2(x) = (\beta + 2\beta + \beta)e^{-x} = 4\beta e^{-x},$$
et donc y_2 est solution de (3) si et seulement si $\beta = -\frac{1}{4}$.

On conclut par superposition des solutions homogènes et particulières : les solutions de l'équation différentielle initiales sont exactement les fonctions de la forme
$$y(x) = y_h(x) + y_1(x) + y_2(x) = (\lambda + \mu x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{4}e^{-x}.$$
On a alors
$$y(1) = (\lambda + \mu + \frac{1}{2})e - \frac{1}{4}e^{-1}.$$
De plus,
$$y'(x) = (\lambda + \mu + \mu x)e^x + \frac{1}{2}(2x+x^2)e^x + \frac{1}{4}e^{-x},$$
et donc
$$y'(1) = (\lambda + 2\mu + \frac{3}{2})e + \frac{1}{4}e^{-1}.$$
On résout alors les équations sur les conditions initiales : on a
$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{4}e^{-1} + \frac{7}{2}e \\ y'(0) = \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{13}{2}e \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda + 2\mu = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}.$$
Ainsi le problème de Cauchy a unique solution :
$$x \mapsto (1 + 2x + \frac{1}{2}x^2)e^x - \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Exercice 2 - Un système 3×3 à paramètres.

1. Lorsque $m = 1$, le sytème se réécrit avec la matrice augmentée suivante :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$
On applique l'algorithme du pivot de Gauss :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_2\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
On remonte ce système. La troisième ligne de ce système ne donne pas d'information. La deuxième fournit
$$2z = 1 \iff z = \frac{1}{2}$$
puis la première
$$x + y - z = 0 \iff x + y = \frac{1}{2}.$$
En conclusion, (x, y, z) est solution du système si et seuleument si
$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$
Il s'agit de l'intersection de deux plans non parallèles, et donc d'une droite de $\mathbb{R}^3$. On peut écrire l'ensemble des solutions sous la forme
$$\mathcal{S} = \{(x, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2}),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

2. On écrit le système à l'aide d'une matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & m-1 \\ m & 1 & m^2 & 1 \\ m^2 & m & -m^2 & 0 \end{array}\right).$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par éliminer la première variable des lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & m-1 \\ m & 1 & m^2 & 1 \\ m^2 & m & -m^2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m^2 L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & m-1 \\ 0 & 1-m & 2m^2 & -m^2+m+1 \\ 0 & m-m^2 & -m^2+m^3 & -m^3+m^2 \end{array}\right)$$

On suppose $m \neq 1$, le cas $m = 1$ ayant déjà été traité. On a ainsi $1 - m \neq 0$, et on peut poursuivre l'algorithme du pivot pour éliminer la deuxième variable de la troisième ligne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & m-1 \\ 0 & 1-m & 2m^2 & -m^2+m+1 \\ 0 & m-m^2 & -m^2+m^3 & -m^3+m^2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - mL_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & m-1 \\ 0 & 1-m & 2m^2 & -m^2+m+1 \\ 0 & 0 & -m^2-m^3 & -m \end{array}\right).$$

La matrice étant échelonnée, on peut remonter le système. La troisième ligne fournit :

$$-m^2(1+m)z = -m.$$

On veut diviser par $-m^2(1+m)$, mais on doit s'assurer que cette quantité n'est pas nulle. Or elle s'annule si $m = 0$ ou $m = -1$. On distingue ainsi trois cas (le cas $m = 1$ ayant déjà été traité) :

- Lorsque $m = -1$. La troisième équation devient $0 = 1$. Le système est donc incompatible et n'a pas de solution.
- Lorsque $m = 0$. La troisième équation devient $0 \cdot z = 0$, elle est vérifiée sans condition sur z. Les deux premières lignes deviennent :
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{(-2, 1, z),\ z \in \mathbb{R}\}.$$
Il s'agit de l'intersection des plans $x = -2$ et $y = 1$, et donc d'une droite.
- Lorsque $m \notin \{-1, 0, 1\}$. La troisième équation fournit
$$z = \frac{1}{m(1+m)}.$$
La deuxième équation devient :
$$\begin{aligned} (1-m)y &= -2m^2 z - m^2 + m + 1 \\ \iff y &= \frac{m^3 - 1}{(m-1)(m+1)} = \frac{m^2 + m + 1}{m+1} \end{aligned}$$
On obtient ensuite
$$x = -y + mz + m - 1 = -1.$$
Ainsi, le système a une unique solution :
$$\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{m^2+m+1}{m+1}, \frac{1}{m(1+m)}\right\}.$$
Notons $(x(m), y(m), z(m))$ le triplet de solutions trouvé. Il est assez pertinent de voir ce qu'il se passe lorsque l'on fait $m = 1$ (ou encore que l'on fait tendre m vers 1). On retrouve $z(1) = \frac{1}{2}$, ce qui est cohérent avec la **Q1**, et $x(m)$ et $y(m)$ vérifient
$$x(1) + y(1) = \frac{1}{2},$$
ce qui est également cohérent.

Exercice 3 - Une suite récurrente.

Partie I :

1. **a.** Il s'agit d'un calcul de dérivée direct.

b. Le trinome $x \mapsto 3x^2 - 14x + 20$ a pour discriminant $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 3 \times 20 = 196 - 240 < 0$. Ainsi, il reste strictement positif sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0.$$
Cela prouve que f est strictement croissante sur $[1, 3]$.

c. Puisque f est croissante sur $[1, 3]$, on a $f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = [\frac{7}{5}, \frac{12}{5}] \subset [1, 3]$.

2. Ces propriétés découlent d'une part de la stabilité de $[1, 3]$ par f (voir question précédente), d'autre part de la croissance de f et du fait que $u_1 = f(3) = \frac{12}{5} < u_0$. Par soucis de complétude, montrons par récurrence la propriété
$$\mathcal{P}_n \ : \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$
Notons au préalable que la suite vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est bien vraie puisque $u_1 = \frac{12}{5}$, et que
$$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3.$$

- Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, à savoir
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$$
Puisque f est croissante, on peut l'appliquer à l'inégalité :
$$\begin{aligned} & f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3) \\ \iff & \frac{7}{5} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{12}{5} \\ \implies & 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 \end{aligned}$$
et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ceci prouve la propriété $\mathcal{P}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le principe de récurrence.

3. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et décroissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \in [1, 3]$.

4. Puisque la fonction f est continue, en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que ℓ vérifie
$$f(\ell) = \ell,$$
c'est-à-dire que ℓ est un point fixe de f. On a par ailleurs :
$$\begin{aligned} & f(\ell) = \ell \\ \iff \quad & \ell^3 - 7\ell^2 + 10\ell = 0. \end{aligned}$$

5. On résout l'équation de la question précédente : on a
$$\begin{aligned} & \ell^3 - 7\ell^2 + 10\ell = 0 \\ \iff & \ell(\ell^2 - 7\ell + 10) = 0 \\ \iff & \ell = 0 \ \text{ ou } \ \ell^2 - 7\ell + 10 = 0 \\ \iff & \ell = 0 \ \text{ ou } \ \ell = 2 \ \text{ ou } \ \ell = 5, \end{aligned}$$
la dernière équivalence venant d'un calcul standard de discriminant.
Puisque $\ell \in [1, 3]$, on déduit que $\ell = 2$.

Partie II :

1. Un tableau de variation standard de f' montre que
$$\max_{t\in[1,3]} |f'(t)| = f'(1) = \frac{9}{10}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on utilise le théorème des accroissements finis :
$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leqslant \max_{t\in[1,3]} |f'(t)||u_{n-1} - \ell| = \frac{9}{10}|u_{n-1} - \ell|.$$

3. On prouve par récurrence élémentaire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^n |u_0 - \ell|,$$

ce qui prouve le résultat puisque $|u_0 - \ell| = |3 - 2| = 1$.

4. On résout l'inéquation

$$(0,9)^n \leqslant 10^{-5}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} &(0,9)^n \leqslant 10^{-5} \\ \Longleftrightarrow\ & n\ln(0,9) \leqslant -5\ln(10) \\ \Longleftrightarrow\ & n \geqslant \frac{-5\ln(10)}{\ln(0,9)} \approx 50 \times 2,3 = 115. \end{aligned}$$

Ainsi, avec les erreurs d'arrondis, il suffit de prendre $n = 115$.

Exercice 4 - Limites et primitives.

Partie I : Quelques limites

1. Posons

$$P(x) = 9x^2 + 2x + 5.$$

Le discriminant de P vaut $\Delta = -176 < 0$, ainsi P est strictement positif sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$, donc par composition, $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ aussi.
Ainsi, la fonction f est bien définie comme quotient sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, et elle est C^∞ sur D_f comme quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. Pour répondre à la question du prolongement par continuité, on étudie la limite de f en 1. Pour cela, on transforme f en utilisant le conjugué du numérateur, et en s'appuyant sur l'identité remarquable $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f, \quad f(x) &= \frac{\left(\sqrt{9x^2+2x+5} - (3x+1)\right)\left(\sqrt{9x^2+2x+5} + (3x+1)\right)}{(x-1)\left(\sqrt{9x^2+2x+5} + (3x+1)\right)} \\ &= \frac{9x^2+2x+5-(3x+1)^2}{(x-1)\left(\sqrt{9x^2+2x+5} + (3x+1)\right)} \\ &= \frac{-4x+4}{(x-1)\left(\sqrt{9x^2+2x+5} + (3x+1)\right)} \\ &= -\frac{4}{\left(\sqrt{9x^2+2x+5} + (3x+1)\right)} \end{aligned}$$

Le dénominateur ayant une limite non nulle lorsque $x \to 1$, on peut déduire directement la limite de ce quotient :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{4}{\sqrt{16}+4} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$.

3. La forme précédente pemet de répondre directement à la question : par somme de limite, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x+5} + (3x+1)\right) = +\infty$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Notez que l'on pouvait ne pas passer par l'utilisation du conjugué en mettant $9x^2$ en facteur dans la racine. On a pour, en notant que $\sqrt{x^2} = |x|$, pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{3|x|\sqrt{1+\frac{2}{9x}+\frac{5}{9x^2}} - 3x - 1}{x-1} = \frac{3x}{x-1}\left(\sqrt{1+\frac{2}{9x}+\frac{5}{9x^2}} - 1 - \frac{1}{3x}\right).$$

Or on a rapidement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x-1} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{2}{9x}+\frac{5}{9x^2}} - 1 - \frac{1}{3x}\right) = 0,$$

et on retrouve le résultat par limite du produit.

4. Cette fois-ci la forme utilisant le conjugué ne lève pas l'indeterminantion, et on doit passer par la forme avec la mise en facteur. Attention, pour $x<0$, la mise en facteur fait apparaître $\sqrt{x^2}=|x|=-x$:

$$f(x)=\frac{3|x|\sqrt{1+\frac{2}{9x}+\frac{5}{9x^2}}-3x-1}{x-1}=\frac{3x}{x-1}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{9x}+\frac{5}{9x^2}}-1-\frac{1}{3x}\right)$$

et donc

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-6,$$

toujours par produit.

5. La fonction g est définie sur $]-1,1[\setminus\{0\}$, et puisque $\operatorname{Arcsin}(0)=0$, la limite de g en 0 est une forme indeterminée. On reconnaît un taux d'accroissement :

$$\forall x\neq 0,\quad g(x)=\frac{\operatorname{Arcsin}x-\operatorname{Arcsin}0}{x-0}.$$

Ainsi par définition du nombre dérivée :

$$\lim_{x\to 0}g(x)=(\operatorname{Arcsin})'(0).$$

Or on a

$$\forall x\in]-1,1[,\quad (\operatorname{Arcsin})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}g(x)=1.$$

On peut donc prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0)=1$.

Partie II : Primitive... Cet exercice montre comment calculer une primitive de la fonction $x\mapsto\sqrt{P(x)}$, où P est un trinôme sans racine réelle (*irréductible*). La morale est double : d'une part c'est possible, d'autre part, on s'expose à des calculs techniques.

1. Il s'agit de la mise sous forme canonique, il suffit de développer le carré et de vérifier.

2. Le changement de variable fournit $\mathrm{d}u=\frac{9}{\sqrt{44}}\,\mathrm{d}t$ et donc $\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{44}}{9}\,\mathrm{d}u$. On a également $(t+\frac{1}{9})=\frac{\sqrt{44}}{9}u$. On peut donc effectuer le changement de variable en utilisant la forme de la question précédente, sans oublier de changer la borne :

$$\int^x h(t)\,\mathrm{d}t=\int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}}\sqrt{9(\frac{\sqrt{44}}{9}u)^2+\frac{44}{9}}\times\frac{\sqrt{44}}{9}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{44}\times\sqrt{44}}{3\times 9}\int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}}\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u=\frac{44}{27}\int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}}\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

3. Le changement de variable $u=\operatorname{sh}w$ conduit à $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}=\operatorname{ch}w$ et donc $\mathrm{d}u=\operatorname{ch}w\,\mathrm{d}w$. On a également $u^2+1=\operatorname{sh}^2w+1=\operatorname{ch}^2w$, où on a utilisé la formule $\operatorname{ch}^2-\operatorname{sh}^2=1$. On a ensuite

$$\sqrt{u^2+1}=\sqrt{\operatorname{ch}^2w}=|\operatorname{ch}w|=\operatorname{ch}w,$$

puisque la fonction ch est positive sur $\mathbb{R}$. De plus, pour trouver la nouvelle borne, on doit inverser le changement de variable, ce qui est proposé dans l'énoncé. On déduit :

$$u=\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\iff w=\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}+\sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2+1}\right).$$

On déduit

$$\frac{44}{27}\int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}}\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u=\frac{44}{27}\int^{b(x)}\operatorname{ch}w\times\operatorname{ch}w\,\mathrm{d}w=\frac{44}{27}\int^{b(x)}\operatorname{ch}^2w\,\mathrm{d}w,\quad\text{avec }\ b(x)=\ln\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}+\sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2+1}\right).$$

4. En utilisant l'énoncé, on a

$$\int^{b(x)}\operatorname{ch}^2w\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\int^{b(x)}(\operatorname{ch}(2w)+1)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2w)+w]^{b(x)}=\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2b(x))+\frac{1}{2}b(x).$$

Toujours avec l'énoncé, avec $y = \frac{9x+1}{\sqrt{44}}$ on a

$$\operatorname{sh}(2b(x)) = \operatorname{sh}(2\ln(y+\sqrt{y^2+1})) = 2y\sqrt{y^2+1} = 2\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2+1}.$$

Finalement, en combinant avec **Q3** :

$$\begin{aligned}\int^x h(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{44}{27}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2b(x)) + \frac{1}{2}b(x)\right)\\ &= \frac{44}{54}\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2+1} + b(x)\right)\\ &= \frac{1}{54}\left((9x+1)\sqrt{(9x+1)^2+44} + 44b(x)\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$b(x) = \ln\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}} + \sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2+1}\right) = \ln\left(\frac{9x+1+\sqrt{(9x+1)^2+44}}{\sqrt{44}}\right) = \ln\left(9x+1+\sqrt{(9x+1)^2+44}\right) - \ln 44.$$

Or les primitives diffèrent d'une constante. On déduit

$$\int^x h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{54}\left((9x+1)\sqrt{(9x+1)^2+44} + 44\ln\left(9x+1+\sqrt{(9x+1)^2+44}\right)\right)$$