DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 6 exercices indépendants.

Exercice 1 - Une division euclidienne et ses applications.

1. Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^3 + X^2 - 12X + 5$ par $B = X^2 + X - 6$.
2. On souhaite définir la fonction f par $f(x) = \frac{2x^3+x^2-12x+5}{x^2+x-6}$. Déterminer I, le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel on peut définir f. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
3. Déduire deux fonctions affines g_1 et g_2 telles que
$$\forall x \in I, \quad f(x) = g_1(x) + \frac{g_2(x)}{x^2 + x - 6}.$$
4. En déduire que f admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$, au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, dont on précisera l'équation. Déterminer la position relative globale de f et $\mathcal{D}$.
5. Déterminer une primitive de f, en précisant son ensemble de définition.

Exercice 2 - Puissances d'une matrice et suites couplées.

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Soit U la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ composée uniquement de 1. Trouver deux réels a et b tels que $A = aU + bI_3$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer U^n. On démontrera le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n.
4. L'expression trouvée pour $n \in \mathbb{N}$ vous donne-t-elle l'inverse de A pour $n = -1$?
5. On considère trois suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ reliées par le système suivant :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 3v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 3v_n + 5w_n \end{cases},$$
ainsi que par la donnée de $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$.
   - **a.** Exprimer $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. En déduire une expression explicite de chacune de ces suites en fonctions de n et des valeurs initiales u_0, v_0 et w_0.
   - **b.** On suppose que $u_0 = 1$ et $v_0 = w_0 = 0$. Donner un équivalent simple de chacune de ces suites lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 - Etude d'un point critique.

Soient les fonctions
$$p(x) = e^{2x} - 1 - 2x - \frac{4}{3}\sin^3 x \quad \text{et} \quad q(x) = \ln(1+x^2).$$

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Donner un équivalent simple de q au voisinage de 0.

3. Déterminer un DL de f à l'ordre 2 en 0.

4. En déduire que f se prolonge par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0.

5. Montrer que f admet en 0 un extremum local dont on précisera la nature.

Exercice 4 - Quelques développements asymptotiques (questions indépendantes).

1. Etablir le DL de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en 1 à l'ordre 3.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H : x \mapsto \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

- **a.** Soit $F : x \mapsto \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$. Exprimer H à partir de F.
- **b.** Donner le DL de H à l'ordre 8 en 0 (on pourra au préalable établir un DL de H').

3. Montrer que la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{\ln(n)^2}{n^3}$ vérifie $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 5 - Une famille de droites. Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la fonction
$$f_m(x) = \frac{m}{1-(m^2-1)x}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f_m, et en déduire que cette fonction est bien définie dans un voisinage de 0.

2. Donner le DL de f_m en 0 à l'ordre 1, et en déduire l'équation de la tangente à la courbe de f_m en 0. On note $\mathcal{D}_m$ cette droite.

3. Par un calcul de dérivée, vérifiez l'équation de $\mathcal{D}_m$ trouvée à la question précédente.

4. Soit $I = (1,0)$. Déterminer la distance de I à la droite $\mathcal{D}_m$.

5. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon 1. Déduire de la question précédente les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{D}_m$ est tangente à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{C}$ en un unique point.

Exercice 6 - Une équation géométrique. Soient A et B deux points du plan. On cherche à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que
$$AM = 2BM.$$

1. (Echauffement : vérifier une solution dans un cas particulier). On se place dans repère orthnormée du plan.

- **a.** Soient $A = (-1,-3)$ et $B = (2,3)$. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de (AB).
- **b.** Soit $M = (x,y)$. Montrer que $AM = 2BM$ si et seulement si $x^2 - 6x + y^2 - 10y = -14$.
- **c.** Montrer que l'équation précédente définit un cercle dont on donnera le rayon et le centre Ω. Montrer que $\Omega \in (AB)$.

2. (Solution générale, par de la géométrie)

- **a.** Etant donné un point G du plan, développer $\|\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\|^2$ et $\|\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\|^2$
- **b.** En déduire que
$$AM = 2BM \iff 3MG^2 = AG^2 - 4BG^2 + 2(\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{GM}.$$
- **c.** Montrer que $\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si G est le point du plan vérifiant $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
- **d.** En utilisant le point G défini à la question précédente, montrer que
$$AM = 2BM \iff MG^2 = \frac{4}{9}AB^2.$$

  Conclure.