DST 6

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 4 exercices indépendants.

Exercice 1 - Un sous-espace vectoriel des polynômes. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$. On rappelle que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. On considère le sous-ensemble de E suivant :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P'(1)\}.$$

1. Donner une base de E, et la dimension de E.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

3. **a.** Pour un polynôme $P \in F$, donner une (ou des) équation(s) vérifée(s) par les coefficients de P.

b. En déduire une base de F, et donner la dimension de cet espace vectoriel.

4. **a.** La famille de polynôme $(X, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est-elle libre ?

b. La famille de polynôme $(X, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est-elle une base de F ?

5. Enoncer la formule de Taylor polynomiale pour un polynôme $P \in F$, à l'ordre 3, en 1. Retrouver la réponse à la question précédente.

6. Proposer un supplémentaire de F dans E et démontrer que votre suggestion est bien un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2 - Une famille de plans. Pour un paramètre $m \in \mathbb{R}$, on définit le plan de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\mathcal{P}_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = m\}.$$

1. On suppose que $m = 0$. Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un espace vectoriel, et en donner une base. Quel est sa dimension ?

2. Et si $m \neq 0$, cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

3. Quel est l'angle entre le plan $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $z = 0$? (On pourra utiliser les normales à ces plans, et exprimer le résutat à l'aide des fonctions circulaires réciproques).

4. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + 4y + z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Décrire géométriquement cet ensemble.

5. Soit $\Omega = (0, -2, 1)$. Donner, en fonction de m, la distance de Ω à $\mathcal{P}_m$.

6. Donner l'équation paramétrique de la droite passant par Ω et orthogonale à $\mathcal{P}_m$. En déduire les coordonnées de H_m, le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}_m$. Vérifiez le résultat trouvé à la question précédente.

7. Soit $\mathscr{C}_m = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m$ l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_m$.

a. Pour quelles valeurs de m a-t-on $\mathscr{C}_m \neq \varnothing$? Conjecturer alors la nature de $\mathscr{C}_m$.

b. Pour ces valeurs de m, calculer pour $M \in \mathscr{C}_m$, la quantité $\|\overrightarrow{H_m M}\|^2$. Vérifier qu'elle ne dépend pas de M (indice : raisonner dans le triangle $\Omega H_m M$).

c. En déduire la nature de $\mathscr{C}_m$.

Exercice 3 - Exercices divers et indépendants sur les espaces vectoriels.

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$, et soient les sous-ensembles suivants de E :

$$H = \text{Vect}((1,1,1,1)), \quad F = \{(x,y,z,t) \in E \mid x-y-z+t=0\}, \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in E \mid \left\{ \begin{array}{l} x-y-z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array} \right. \}.$$

a. Donner la dimension de H.

b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en donner une base et sa dimension.

c. Faire de même pour G. Montrer que $G \subset F$.

d. A-t-on aussi $H \subset F$?

e. Montrer que H et G sont en somme directe.

f. En déduire que $F = H \bigoplus G$.

2. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$. Soit l'ensemble des matrices suivant :

$$F = \left\{ A \in E \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

a. Rappeler la dimension de E, et en donner une base.

b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c. En donner une base, et préciser sa dimension.

d. Quelle est la dimension d'un supplémentaire de F dans E ? En exhiber un.

Exercice 4 - Exercices divers et indépendants sur les polynômes.

1. Soit $P = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 12X^3 + 23X^2 - 18X + 5$.

a. Donner une racine évidente de P en précisant sa multiplicité.

b. Décomposer P en produit de polynômes irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ainsi que dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto e^{x^2}.$$

a. Calculer f' et f''.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2},$$

et donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.

3. Soit le polynôme $P = (X^2 - 2X)^2 + 3$.

a. Ce polynôme est-il scindé sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?

b. Le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit le polynôme

$$P_n = (X+1)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}.$$

a. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

b. Déterminer les racines de P_n.

c. En déduire une décomposition de P_n en produit de polynômes irreductibles dans $\mathbb{C}[X]$.