

DST 3 IPT : Part two

Exercice 1 - Calcul d'une intégrale.

1. On fixe deux réels $a < b$, et un entier $N \in \mathbb{N}^*$. On considère les valeurs $x_k = a + k \times \frac{b-a}{N}$, avec $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Que vaut x_0 ? et x_N ? Quel est l'espacement $x_{k+1} - x_k$ entre deux valeur consécutives ?
2. Proposer une fonction `abscisse(N)` qui renvoie un itérable X (liste, range...) qui contient les valeurs $(x_k)_{k=0, \dots, N}$ décrites ci-dessus.
3. Pour faire simple, on suppose $a = 0$ et $b = 1$. On se donne une liste $Y = [y_0, \dots, y_N]$ de valeurs réelles, de même longueur que X , correspondant à une fonction qui aurait aux abscisses X les valeurs de Y . La valeur approchée « par rectangles » de l'intégrale est

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k.$$

Proposer une fonction `integrale(Y,N)` qui renvoie `False` si Y n'est pas de longueur N , et sinon, calcule la somme ci-dessus. La fonction `sum` de python est bien sûr interdite.

4. Plus N est grand, plus le nombre I_N approche avec précision l'intégrale, mais il faut se décider à s'arrêter... Pour un réel $E > 0$, proposer une fonction `approx(Y,E)` qui calcule la quantité I_N pour des valeurs de N de plus en plus grande jusqu'à ce que $|I_{N+1} - I_N| < E$, en se limitant quoiqu'il arrive à $N < 100$. On pourra bien sûr utiliser la fonction `integrale(Y,N)` ci-dessus.
5. Si $I = \int_a^b f(t) dt$, connaissez-vous une majoration théorique de $|I_N - I|$?
6. La librairie `matplotlib` est chargée. Quelle commande utiliser pour tracer les points d'abscisses et d'ordonnées respectives X et Y ?