Interro de calcul 2
Nombres complexes – Corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a
$$(1-i)^2+3-i = 1-2i+(-i)^2+3-i = 3-3i \quad \text{et} \quad \frac{1}{i} = \frac{-i}{|i|^2} = -i.$$

Question 2 : On a $-2 = 2\times(-1) = 2e^{i\pi}$.

Question 3 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors $|e^{i\theta}| = 1$, puisque $e^{i\theta}$ est l'affixe d'un point du cercle trigonométrique.

Question 4 : On a $|z| = \sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}$, puis rapidement $z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On déduit :
$$(1-i)^8 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^8 = 2^4e^{-2i\pi} = 16\times 1 = 16.$$

Question 5 : On a $|z| = \sqrt{2^2+\sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$, puis
$$z = 4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{12}}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
On pouvait bien sûr chercher l'argument de manière habituelle.

Question 6 : On a $(3ie^{i\frac{\pi}{8}})^2 = -9e^{i\frac{2\pi}{8}} = 9e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 9e^{\frac{5i\pi}{4}}$.

Question 7 : Soient A d'affixe i et $-i$, et z d'affixe M. Alors $|\frac{z-i}{z+i}| = 1 \iff \frac{AM}{BM} = 1$, Ainsi il s'agit des complexes dont l'image est sur la médiatrice du segment $[AB]$, à savoir la droite d'équation $y = 0$.

Question 8 : On applique la technique de l'angle moitié :
$$1+e^{i\theta} = e^{i0}+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}\times(2\cos\frac{\theta}{2}) \quad \text{d'après la formule d'Euler}$$
On déduit $|1+e^{i\theta}| = 2\times|e^{i\frac{\theta}{2}}|\times|\cos\frac{\theta}{2}| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$ car $e^{i\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{U}$ est de module 1, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$ (voir **Q3**).

Question 9 : Le nombre $z = 0$ est solution. Autrement, cherchons z sous la forme $z = re^{i\theta}$, de sorte que $z^3 = r^3e^{3i\theta}$. Ainsi, z^3 est imaginaire pur si et seulement si
$$3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{6} \ [\frac{\pi}{3}].$$