Interro de calcul 2
Nombres complexes – Corrigé

Question 1 : On a

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{|i|^2} = -i \quad \text{et} \quad \frac{2-i}{-3+i} = \frac{(2-i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-6+3i-2i+i^2}{|-3+i|^2} = \frac{-7+i}{(-3)^2+1^2} = \frac{-7+i}{10}.$$

Question 2 : On a $-2i = 2 \times (-i) = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}$. On peut aussi trouver $2e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

Question 3 : On a $z = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ donc $z^6 = \sqrt{2}^6 e^{\frac{3i\pi}{4}\times 6} = 2^3 e^{\frac{9i\pi}{2}} = 8i$ car $\frac{9\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Question 4 : On a $|-5+12i| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

Question 5 : Posons de $a = 3 - i$, ainsi que $A = (3, -1)$ d'affixe a et M d'affixe z. On a alors

$$\left|z - 3 + i\right| = 2 \iff AM = 2$$

et donc l'ensemble des solutions est le cercle de centre A et de rayon 2.

Question 6 : On applique la technique de l'angle moitié :

$$1 - e^{i\theta} = e^{i0} - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times (-2i \sin\frac{\theta}{2}).$$

On déduit $|1 - e^{i\theta}| = 2|\sin\frac{\theta}{2}|$ puisque $|i| = 1$ et $|e^{i\frac{\theta}{2}}| = 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Question 7 : Notons f la fonction, on a

$$f'(x) = 1 \times \cos x - x\sin x + 1 \times \sin x + x\cos x = (1+x)\cos x + (1-x)\sin x$$

puis

$$f''(x) = 1 \times \cos x - (1+x)\sin x - 1 \times \sin x + (1-x)\cos = (2-x)\cos x - (x+2)\sin x$$

Question 8 : La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est $-\frac{3}{x^4}$, et celle de $x \mapsto (\ln x)^n$ est $x \mapsto n \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{n-1}$, pensez à $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

Question 9 : On a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Question 10 (dédicace à Madame Cavallo): On a $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.