Interro de calcul 3
Nombres réelles et fonctions

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a $-2x^2+3 \leqslant 1 \iff -2x^2 \leqslant -2 \underset{\text{car } -2<0}{\iff} x^2 \geqslant 1 \underset{\text{voir la parabole}}{\iff} x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Question 2 : On sait que $|x-3|<4$ si et seulement si x est à une distance plus petite que 4 de 3, c'est-à-dire si $x \in]3-4, 3+4[=]-1, 7[$. On peut le confirmer par le calcul :

$$|x-3|<4 \iff -4 < x-3 < 4 \iff -1 < x < 7.$$

Question 3 : La fonction sera définie lorsque

$$\begin{cases} x-2>0 \\ \ln(x-2)-5 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ \ln(x-2) \neq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ x-2 \neq e^5 \end{cases} \iff x \in]2,+\infty[\setminus \{2+e^5\}.$$

.

Question 4 : On a $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$. Pour dériver $x \mapsto \frac{2}{x}$, surtout, ne pas utiliser $(\frac{u}{v})'$ (cela marche mais c'est long et source d'erreurs), mais faire $2 \times (-\frac{1}{x^2})$. Pour dériver $x \mapsto (\ln x)^2$, on peut reconnaitre une composée et utiliser $(u^2)' = 2u'u$.

Question 5 : Vu en cours : on pose $D(x) = x - \sin x$, dont on cherche le signe en étudiant ses variations. On a $D'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ donc D est croissante, et donc pour $x \geqslant 0$, on a $D(x) \geqslant D(0) = 0$, ce qui donne bien $\sin x \leqslant x$.

Question 6 : Une primitive de $x \mapsto e^{ax}$ est $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax}$. On rappelle que pour calculer une intégrale, on calcule la différence d'une primitive entre la borne du haut et la borne du bas :

$$I(T) = [\frac{1}{-\frac{1}{\tau}} e^{-\frac{t}{\tau}}]_0^T = -\tau(e^{-\frac{T}{\tau}} - 1) = \tau(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}).$$

Cette dernière forme est préférée par le physicien car elle est plus lisible puisque $0 < 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} < 1$.

Puisque $\tau > 0$, on a $\lim_{T \to +\infty} I(T) = \tau$.

Question 7 : Surtout, pas de formule d'addition, ce n'est pas le sujet. On a

$$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{puis} \quad f''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

On note que f est solution de l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$. La fonction a pour période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, en effet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = \cos(\omega(t+T)+\varphi) = \cos(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi) = \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi).$$

Question 8 : On a

$$\begin{aligned} & \frac{U-V_A}{R} + \frac{U-V_A}{2R} + \frac{U-V_A}{3R} = I \\ \underset{\text{muliplie par } R}{\iff} & (U-V_A) + \frac{1}{2}(U-V_A) + \frac{1}{3}(U-V_A) = RI \iff \frac{11}{6}(U-V_A) = RI \iff U = V_A + \frac{6}{11}RI. \end{aligned}$$