Interro de calcul 4
Inégalités et fonctions–corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 : L'inéquation indique que x est à une distance au plus 4 du réel -2, d'où l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = [-6, 2]$. Cela est confirmé par le calcul

$$|x+2| \leqslant 4 \iff -4 \leqslant x+2 \leqslant 4 \iff -6 \leqslant x \leqslant 2 \iff x \in [-6, 2].$$

Question 2 : Le trinôme $x^2 - 2$ est positif, sauf entre ses racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Finalement,

$$x^2 \geqslant 2 \iff x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$$

Question 3 : On enlève les valeurs absolues, en distingant selon le signe de $2x-1$, qui dépend de si $x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $x \geqslant \frac{1}{2}$:
- Si $x \leqslant \frac{1}{2}$, on a $2x-1 \leqslant 0$ et donc $2x + |2x-1| = 2x - (2x-1) = 1$.
- Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a $2x-1 \geqslant 0$ et donc $2x + |2x-1| = 2x + (2x-1) = 4x-1$.

Question 4 : On a $f'(x) = \frac{\cos x}{2} + 6xe^{3x^2}$.

Question 5 : On a

$$\forall x \geqslant 2, \quad 0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\frac{\cos x}{x}| \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que la fonction f est bornée.

Question 6 : On a $g'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$. En étudiant le signe du numérateur, on voit que la fonction est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$, elle atteint donc son minimum en $x = 2$. Ce minimum vaut $g(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$.

Question 7 : Voir cours.

Question 8 : On a la loi de Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Question 9 : On définit la fonction $D :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $D(x) = \ln(1+x) - x$. On a $D'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{x}{1+x}$, est du signe de x sur $]-1, +\infty[$. On déduit les variations de D, puis que D minimale en 0. Or $D(0) = 0$, ainsi,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad D(x) \geqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x.$$

Question 10 : La contraposée de « $P \implies Q$ » est « non $Q \implies$ non P ».