Interro de calcul 4
Calculs algébriques et équations dans $\mathbb{C}$
Corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi $z^2=1-i$ si et seulement si $z=\pm 2^{\frac{1}{4}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$.

Question 2 : On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)=\sum_{k=1}^{n} k^2+2\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1+6)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

Question 3 : Soit $x\in\mathbb{C}$, avec $x\neq 1$, et $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{7} 2^k=\sum_{k=0}^{7} 2^k-1=\frac{1-2^8}{1-2}-1=255-1=254.$$

Question 4 : On a : $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ainsi :

$$\frac{k}{n}\times\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\times\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=\binom{n-1}{k-1}.$$

Question 5 : On repère un télescopage :

$$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}.$$

Question 6 : On applique la formule du binôme de Newton :

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.$$

Question 7 : On a :

$$X^2 - X - 2 = (X - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (X - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}.$$

Question 8 : Les solutions de $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines 5-ième de l'unité : $\mathbb{U}_5 = \{e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k = 0, \dots, 4\}$.

On a $z^5 = -1 \iff z^5 = e^{i\pi}$. Une solution évidente est $z_0 = e^{\frac{i\pi}{5}}$. On a alors

$$z^5 = -1 \iff z^5 = z_0^5 \iff (\frac{z}{z_0})^5 = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_5.$$

Ainsi, les solutions sont

$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{i\pi}{5}} e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k = 0, \dots, 4\}.$$