Mini-chapitre - Systèmes linéaires : première approche

1 Structure des solutions en dimension 2 et 3

On rappelle comment résoudre des systèmes linéaires, et, plus important, quelle vision géométrique adopter sur l'ensemble des solutions.

Le cas de la dimension 2 Commençons par un exemple facile :

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ d'inconnus } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La méthode naïve de la subtitution issue du collège doit être choisie en dernier ressort. Désormais il sera préférable d'éliminer les variables successivement avec la méthode du pivot de Gauss. Pour ce système, on soustrait la première ligne à la deuxième. Cette opération est notée $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, et on peut écrire :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x+y=1 \\ -2y=0 \end{cases}$$

et on conclut facilement : la dernière ligne donne y puis la première x.

Une vision essentielle est celle géométrique : chaque ligne du système original est l'équation d'une droite. Ainsi un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution si et seulement si le point associé est sur l'intersection de deux droites.

Exemple 1 - Un exemple élémentaire. Tracer les droites associées au système précédent et retrouver le résultat.

On distingue trois cas de systèmes linéaires 2×2

- Le cas où les deux lignes sont indépendantes. Les droites associées ne sont pas parallèles, et il y a une unique solution, correspondant à leur intersection.
  Exemple : le système précédent.
- Le cas où les deux membres de gauche sont proportionnels, mais pas les seconds membres. Les droites associées sont parallèles mais distinctes, et ne se coupent pas. Le système n'a pas de solution, on dit qu'il est *incompatible*.
  Exemple : le système $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=-1 \end{cases}$
- Le cas où les deux équations sont proportionnelles. Elles décrivent en fait la même droite. Le système possède une infinité de solutions, situeés sur cette droite.
  Exemple : le système $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

Le cas de la dimension 3 Il est en fait à peine plus compliqué. La différence vient de la propriété suivante que vous connaissez bien :

Proposition 2 - Equation d'un plan. Soit a, b et c des réels non tous nuls, et d un réel. Alors l'équation $ax+by+cz=d$ détermine un plan dans l'espace, de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Considérons maintenant un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}, \quad \text{d'inconnus } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Ce système comporte neuf coefficients, notés $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ (supposés non tous nuls), et 3 seconds membres $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$. Ainsi ces équations décrivent au plus 3 plans, et les solutions du système, si elles existent, correspondent à l'intersection de ces trois plans.

On peut montrer en énumérant les différents cas géométriques que l'on a quatre configurations possibles :

- Le système a une infinité de solutions, qui forment un plan.
- Le système a une infinité de solutions, qui forment une droite.
- Le système a une unique solution.
- Le système n'a pas de solutions.

Il peut être assez complexe de faire le tri. De plus, on souhaite créer un algorithme qui nous amène à résoudre le système. Pour cela, il est nécessaire de s'éloigner de la situation géométrique.

2 Premières matrices

Rangeons les coefficients d'un système linéaire dans un tableau de nombres, appelé « matrice ». Observons les propriétés du systèmes sur la forme de la matrice :

- Pour le système $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$ on associe la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Pour le système échelonné $\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad -y + z = 6 \\ \quad\quad -z = 1 \end{cases}$ on associe la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (de type *triangulaire*).
- Pour le système découplé $\begin{cases} x = -1 \\ -y = 6 \\ 3z = 1 \end{cases}$ on associe la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (de type *diagonale*).

Nous allons développer une théorie profonde liant matrices, systèmes linéaires, et fonctions linéaires de $\mathbb{R}^n$. On attache sa ceinture!

On peut synthétiser un sysème linéaire en « augmentant » sa matrice avec la colonne des seconds membres. Par exemple, le premier système peut se noter $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$.

Cette notation permet de gagner du temps : on effectue les opérations sur les lignes du systèmes (par exemple, l'algorithme du pivot) directement sur les lignes de la matrice, sans avoir à recopier à chaque fois les inconnues, qui sont finalement muettes.

3 Résolution par le pivot de Gauss

Définition-Proposition 3 - Operations sur les lignes. Etant donné un système linéaire dont on note (L_i) les lignes, on définit les opérations suivantes :

- Permutation des lignes i et j. Cette opération se note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication de la ligne i par $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette opération se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajout de la ligne j, multipliée par $\lambda \in \mathbb{R}$, à la ligne i. Cette opération se note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Chacune de ces operations laissent l'ensemble des solutions inchangé si elle est faite indépendamment des autres, et aboutit sur un un système qui est dit *équivalent* au premier.

✖ **Attention !** ✖ Si on souhaite faire plusieurs de ces opérations, il est important de les faires SUCCESSIVEMENT et pas en même temps, sinon on pourrait changer la nature du système.

A l'aide de ces opérations, on peut définir un algorithme pour transformer un système d'équations en un système plus simple :

Définition-Proposition 4 - Pivot de Gauss. L'algorithme est donné sur un système 3×3, mais il fonctionne sur n'importe quel système **linéaire**.
Soit un système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}, \quad \text{d'inconnus } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

On suppose que un des (a_{i1}) est non nul, de sorte que la variable x apparait dans le système. Sinon on applique l'algorithme à une autre variable.

1. (Faire apparaître x dans la première ligne)
   - **a.** Si $a_{11} \neq 0$, passer à l'étape suivante.
   - **b.** Autrement, soit j la première ligne où a_{j1} est non nulle. Faire $L_1 \leftrightarrow L_j$.
2. (Eliminer les coefficients en x sur les deuxième et troisième lignes.)
   Notons p_1 le coefficient en x de la première ligne (le pivot). On a un système de la forme

$$\begin{cases} p_1x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \beta_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = \beta_2 \\ \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = \beta_3 \end{cases}$$

   Faire $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\alpha_{21}}{p_1}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\alpha_{31}}{p_1}L_1$. On obtient un système de la forme

$$\begin{cases} p_1x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \beta_1 \\ \alpha'_{22}y + \alpha'_{23}z = \beta'_2 \\ \alpha'_{32}y + \alpha'_{33}z = \beta'_3 \end{cases}$$

3. Répéter le processus pour la variable y dans les deux dernières lignes. On obtient un système de la forme

$$\begin{cases} p_1x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \beta_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = \beta'_2 \\ a''_{33}z = \beta''_3 \end{cases}$$

Attention, dans les dernières lignes, les coefficients peuvent être nuls !

Alternative de Gauss-Jordan : A l'étape **2**, on effectue d'abord $L_1 \leftarrow \frac{1}{p_1}L_1$. Ainsi, le pivot vaut 1, il est plus facile à manipuler. Par contre, des fractions interviennent. Ce n'est pas magique car des calculs de fractions interviendront quoi qu'il arrive, s'ils doivent arriver.

Proposition 5 - Comment résoudre avec l'algorithme du pivot ?. Après l'algorithme du pivot, on obtient un système **échelonné**. Le nombre de lignes où apparaissent les inconnues est appelé le **rang du système**, c'est aussi le nombre de pivots utilisés (incluant la dernière ligne).
Voici quelques pistes (ce n'est pas une disjonction de cas) :

- Si on observe une (ou des) lignes avec un membre de gauche nul et un second membre non nul (par exemple « 0=1 »). Le système n'a pas de solution. Si les second membres dépendent de paramètres, on obtient les « équations de compatibilités » du système.
- Si le système est compatible, on peut le résoudre en partant du bas : on remonte le pivot.
- Ne pas avoir peur d'une ligne « 0=0 », qui indique que cette ligne ne sert à rien.
- Ne pas avoir peur d'un système sous-déterminé : on exprime les premières variables (dites principales) en fonction des dernières (dites secondaires).
- Ne pas chercher à trouver une unique solution si le système est sous-déterminé, il y a une infinité de solutions. On peut interpréter géométriquement avec des équations de droites, de plans ...

Exemple 6 - Pivot de Gauss. Appliquer l'algorithme du pivot pour résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x+3y+6z=-3 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x+4y-2z=-2 \\ -x-2y+z=a \end{cases}$ (discuter selon le paramètre $a \in \mathbb{R}$).

3. $\begin{cases} x+2y-z=m \\ 2x-3y+z=p \\ x+9y-4z=q \end{cases}$ (discuter selon les paramètres $(m,p,q) \in \mathbb{R}^3$).

Correction :

1.

2.

3. C'est Scotto qui régale. On écrit le système sous forme de matrice augmentée et on commence le pivot :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2m \\ -3 & -4m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ -4 & -5m & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+\frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-\frac{m}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2m \\ 0 & \frac{9}{2}-4m & 1-3m \\ 0 & 1-\frac{3}{2}m & 1+m^2 \\ 0 & 6-5m & -4m \end{array}\right)$$

La pochaine étape s'annonce pénible. On peut la faire, mais on préfère normaliser en multipliant chaque ligne afin de ne plus avoir de fractions :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2m \\ 0 & \frac{9}{2}-4m & 1-3m \\ 0 & 1-\frac{3}{2}m & 1+m^2 \\ 0 & 6-5m & -4m \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2m \\ 0 & 9-8m & 2-6m \\ 0 & 2-3m & 2+2m^2 \\ 0 & 6-5m & -4m \end{array}\right)$$

Pour continuer l'algorithme, on doit s'assurer d'avoir un pivot non nul, il faut discuter selon m. Inutile de permuter des lignes : tous les autres coefficients de la deuxième colonne dépendent de m, et on aura un problème similaire. On a : $9-8m \neq 0 \iff m \neq \frac{9}{8}$. On distingue deux cas, on començant comme souvent comme le plus restrictif :

- Si $m = \frac{9}{8}$. La deuxième ligne devient :

$$0 = 2-6m \iff m = \frac{1}{3}.$$

  Le système est incompatible.

- Si $m \neq \frac{9}{8}$, on poursuit le pivot :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2m \\ 0 & 9-8m & 2-6m \\ 0 & 2-3m & 2+2m^2 \\ 0 & 6-5m & -4m \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow 3-\frac{2-3m}{9-8m}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-\frac{6-5m}{9-8m}L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2m \\ 0 & 9-8m & 2-6m \\ 0 & 0 & c_m \\ 0 & 0 & d_m \end{array}\right),$$

  où les coefficients c_m et d_m sont calculés séparément pour plus de lisibilité :

$$\begin{cases} c_m = 2+2m^2 - \frac{2-3m}{9-8m} \times (2-6m) = \frac{-16m^3+2m+14}{9-8m} \\ d_m = -4m - \frac{6-5m}{9-8m} \times (2-6m) = \frac{2m^2+10m-12}{9-8m} \end{cases}.$$

  Pour y voir clair, faisons le bilan : le système équivalent est

$$\begin{cases} 2x+3y=-2m \\ (9-8m)y = 2-6m \\ 0 = -16m^3+2m+14 \\ 0 = 2m^2+10m-12 \end{cases}$$

  On étudie les deux dernières lignes, dites conditions de compatbilité. La quatrième est une équation de degré 2, donc on l'étudie en premier :

$$0 = 2m^2+10m-12 \iff m=1 \text{ ou } m=-6,$$

or si $m = -6$, la troisième ligne n'est pas vérifiée. En revanche, elle l'est pour $m = 1$. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_m = 0 \\ d_m = 0 \end{array} \right. \iff m = 1.$$

On conclut facilement en resolvant les deux premières lignes dans ce cas-là : $(x, y) = (4, -4)$.

En conclusion, si $m \neq 1$, alors l'ensemble des solutions est vide, et si $m = 1$, on a une unique solution : $\mathcal{S} = \{(4, -4)\}$.