Chapitre 9 - Limites et continuité

Nos objectifs :

- Définir rigoureusement la notion de limite en un point d'une fonction, comme nous l'avons fait pour les suites et retrouver les règles de calcul du lycée.
- En déduire une définition rigoureuse des notions de notions de continuité pour une fonction.
- Présenter des théorèmes entrevus (TVI, théorème de la bijection,...) pour lesquels la contnuité fait partie des hypothèses.

Dans l'ensemble du chapitre, tous les intervalles sont considérés comme étant non vides et non réduit à un point, ce qui est le minimum quand on veut faire de *l'analyse*.

1 Limite d'une fonction (en...)

Preliminaires : la notion de voisinage

Définition 1 - Voisinages.

- Voisinage d'un point : soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a un intervalle ouvert centrée en a, c'est-à-dire un intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
- Voisinage de $+\infty$: on appelle voisinage de $+\infty$ un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
- Voisinage de $-\infty$: on appelle voisinage de $+\infty$ un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Soit a un point ou une extrémité d'un intervalle. Nous allons voir que certaines propriétés sont vraies dans un voisinage de a, par exemple “la fonction cos est bornée au voisinage de $+\infty$”.

1.1 Définitions epsilonesques en cascades

Définition 2 - Limite finie en un réel. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un réel dans I, ou à une extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, alors on dit que f admet ℓ pour limite en a (ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque 3 - Décoder la définition.

- (Une histoire de distance). Le dessin est essentiel, et permet de traduire cette définition comme suit : “si x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de ℓ".
- (Une histoire de voisinage) Dans la définition, on peut remplacer « $\forall x \in I$ » par « pour tout x dans voisinage de a ». En effet, on voit ensuite qu'on demande à x d'être à une distance au plus η de a. On pourra donc considérer dans les preuves que x est proche de a.
- (Le x disparaît dans la limite). La définition de limite fait intervenir une variable x muette. Conceptuellement, il n'y a que trois objets : la fonction f, le réel a et la limite ℓ. En pratique on a besoin d'une variable muette x pour décrire la fonction, et de deux quantificateurs pour parler de “distance” à a et de “distance” à ℓ.
- (L'ordre des quantificateurs). Tout comme dans les définitions de limites chez les suites, l'ordre des quantificateurs compte. Dans la définition, le η dépend de ϵ.

Exercice 4 Si f admet ℓ comme limite en a, et si f est définie en a, alors on a $f(a) = \ell$.

Exemple 5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right. .$$

La fonction f admet-elle une limite en 0 ? et sa restriction à $]0, +\infty[$?

Définition 6 - Limite finie en l'infinie. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, alors

1. En supposant que I est un voisinage de $+\infty$, on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ (ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$) lorque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell, \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

2. En supposant que I est un voisinage de $-\infty$, on dit que f admet ℓ pour limite en $-\infty$ lorsqu'on a la même proposition, mais en remplaçant $x \geqslant M$ par $x \leqslant M$ (voir tableau récapitulatif).

Exercice 7 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

admet une limite en $+\infty$.

Bien sûr, nous allons bientôt retrouver nos outils habituels pour le calcul des limites (et même plus). Les définitions epsilonesques seront là pour les exos les plus théoriques...

Définition 8 - Limites infinies. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors

1. (Limite qui vaut $+\infty$)

   a. Si $a \in \mathbb{R}$ est à une extrémité de I, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en a lorsque

$$\forall A > 0, \quad \exists \varepsilon > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \varepsilon \implies f(x) \geqslant A$$

   On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

   b. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque

$$\forall A > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \geqslant M \implies f(x) \geqslant A.$$

   On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   c. On a une définition similaire pour « f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ » (voir tableau récapitulatif).

2. (Limite qui vaut $-\infty$) On a trois définitions similaires pour « f admet $-\infty$ pour limite, en $a \in \mathbb{R}$, ou en $+\infty$, ou encore en $-\infty$ » (voir tableau).

Exercice 9 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Et en $-\infty$?

Exercice 10 Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

✖ **Attention !** ✖ On fera bien attention à ce que le point a est sur le bord d'un intervalle pour des limites infinies. Ainsi, on évitera de parler de la limite en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Nous allons bientôt définir les notions de limites à gauche et à droite, ce qui va nous permettre d'éviter de définir deux fonctions séparément...

Définition 11 - Limites à gauche ou à droite.

- (Limite à gauche). Soit $f = I \to \mathbb{R}$ une fonction et a à l'intérieur de I. Soit ℓ une limite, éventuellement infinie. Alors f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ admet ℓ pour limite en a. On note alors

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x\to a^-}{\to} \ell$$

- (Limite à droite). On a une définition similaire en remplaçant $I \cap]-\infty, a[$ par $I \cap]a, +\infty[$, et on note alors

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x\to a^+}{\to} \ell$$

Remarque 12 Notez que dans la définition de limite à gauche (ou à droite), le point a est exclu de l'ensemble de définition. Ainsi cette définition est différente de la limite en un point a appartenant au bord de l'ensemble de définition (dans ce cas, f est défini en a), mais il s'agit de la même pour un point a sur le bord mais n'appartenant pas à l'ensemble de définition.

Proposition 13 - Lien entre limite, et limites à gauche et à droite. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie dans un voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \text{ et } f(a) = \ell$$

Exercice 14 Reprendre la fonction de l'exercice 5 et étudier sa limite à gauche et à droite en 0.

Exercice 15 Soit E la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = \lfloor x \rfloor$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, étudier les limites à gauche et à droite de E en n.

✎ **En pratique** ✎ N'apprenez pas par coeur TOUTES les définitions avec le quantificateurs, mais seulement une ou deux. Apprenez plutôt à comprendre l'ordre des quantificateurs, ainsi que ce que représentent les “briques” de base, comme par exemple $|x-a| \leqslant \eta$, ou encore $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$, ou encore $f(x) \geqslant A$, et ainsi de suite... Entrainez-vous à compléter le tableau suivant :

Limites ($a \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$)	Quantifications
$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$	
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$	
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$	
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	

1.2 Premières propriétés et règles de calculs

Proposition 16 - Unicité de la limite. Si une fonction admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en un point a (éventuellement infini), alors celle-ci est unique.

Proposition 17 - Les fonctions ayant une limite sont bornées. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ un point dans I ou à une de ses extrémités. Si f admet une limite en a, alors f est bornée dans un voisinage de a.

Théorème 18 - Caractérisation de la limite par les suites. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en un point a (éventuellement infini) si et seulement si pour TOUTES suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans I qui tend vers a, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell.$$

On parle du critère *séquentiel* de la limite (vocabulaire hors programme). Le mot séquentiel vient de *sequence*, qui signifie “suite” en anglais. Ce résultat est très profond car il établit un lien fort entre les limites de suites, et les limites d'une fonction.

Exemple 19 - Un drôle de fonction. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Par la même méthode, montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Si vous disposez d'un outil graphique, la représenter.

C'est le moment de rappeler les règles de calculs pour les limites. Celle-ci ont été vues au lycée, et nous n'allons pas les lister mécaniquement : ce sont les MEMES que pour les limites de suites, et la preuve découle d'ailleurs du caractère séquentiel de la limite.

Théorème 20 - Opérations sur les limites. Les opérations pour les limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions sont les MEMES que pour les limites de suites.

Démonstration. La preuve découle du caractère séquentiel de la limite

✖ **Attention !** ✖ On n'écrira pas des choses comme « $+\infty \times 2 = +\infty$ » mais on parlera bien de limites, ou encore de formes indeterminées.

✎ **En pratique** ✎ Les formes indeterinées arriveront naturellement dans la plupart des problèmes de limites. Voici quelques techniques pour lever l'indetermination, qui vont être enrichies :

- Mise en facteur d'un terme dominant (ou quantité conjuguée), par exemple $x \mapsto \frac{x^2+3}{2x^2+x-1}$ ou $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ lorsque $x \to +\infty$.
- Pour un quotient, essayer de simplifier (par exemple : $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, lorsque $x \to -1$).
- Pour un quotient qui est taux d'accroissement, utiliser le nombre dérivée (par exemple : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ en 0).
- Cela revient un peu au même : utiliser un DL à l'ordre 1 (sera exploré au S2).
- Des croissances comparées (vues dans le chapitre sur les fonctions usuelles).
- Des théorèmes d'encadrement (voir ci-dessous).

Bientôt nous disposerons d'outils puissants pour traiter un grand nombre de formes indeterminées.
Attention, certaines formes indeterminées n'ont tout simplement pas de limite, pensez à $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ en 0 !

Théorème 21 - Composition de limites. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(I) \subset J$. Soit a un point (éventuelement infini) dans I ou à une extrémité de I, et de même b un point (éventuellement infini) dans J ou à une extrémité de J. Alors

$$\begin{cases} \lim\limits_a f = b \\ \lim\limits_b g = \ell \end{cases} \implies \lim_a g \circ f = \ell$$

Exemple 22 - Limite d'une composée. Déterminez la limite de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\frac{x}{\operatorname{ch} x})$ en $+\infty$.

Proposition 23 - Passage à la limite dans des inégalités. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit a un point tel que f et g sont définies dans un voisinage de a. On suppose que

$$\begin{cases} f \leqslant g \quad \text{dans un voisinage de } a, \\ \lim\limits_a f = \ell, \\ \lim\limits_a g = \ell', \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \ell \leqslant \ell'$$

✎ **En pratique** ✎ Ce résultat, déjà vu pour les suites, est souvent intéressant lorsqu'une des deux fonctions est une constantes, car elle permet de donner des inégalités sur les limites. Il est important de noter ques les inégalités sont larges.

Voici un contre-exemple qui montre qu'il n'y a pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \frac{1}{x} > 0, \text{ mais } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

N'oubliez pas cependant qu'une inégalité stricte implique une inégalité large ! !

Voici un résultat qui est une sorte de réciproque, et qui est bien pratique pour établir qu'une fonction est positive ou négative :

Proposition 24 - Rester du bon côté. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage d'un point a fini ou infini. On suppose que f tend vers une limite ℓ **non nulle** en a. Alors il existe un voisinage de a tel que f reste du signe de ℓ dans ce voisinage (en particulier f ne s'annule pas sur ce voisinage).

1.3 Théorèmes d'existence de limite

Nous présentons des théorèmes qui permettent d'affirmer qu'une limite existe, ce qui est souvent un prérequis pour appliquer les résultats du chapitre précédent.

Proposition 25 - Théorèmes d'encadrement (le retour des gendarmes). Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage d'un point a, fini ou infini. Alors :

1. (Théorème d'encadrement)

$$\begin{cases} f \leqslant g \leqslant h \quad \text{dans un voisinage de } a \\ \lim\limits_a f = \lim\limits_a h = \ell \end{cases} \implies \lim_a g = \ell$$

2. (Théorème de minoration)

$$\begin{cases} f \leqslant g \quad \text{dans un voisinage de } a \\ \lim\limits_a f = +\infty \end{cases} \implies \lim_a g = +\infty$$

3. (Théorème de majoration)

$$\begin{cases} g \leqslant h \quad \text{dans un voisinage de } a \\ \lim\limits_a h = -\infty \end{cases} \implies \lim_a g = -\infty$$

✎ **En pratique** ✎ Ces théorèmes sont tout indiqué pour "évacuer" un élément qui pose problème dans une limite, mais que l'ont peut contrôler par des inégalités. La plus connue d'entre toutes est

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1,$$

mais ce n'est pas la seule.

✖ **Attention !** ✖ Si vous montrez que $f \leqslant g$ dans un voisinage de a et que $\lim\limits_{a} g = +\infty$, vous ne pouvez rien conclure.

Exemple 26 - Trouver l'encadrement. Déterminer si les fonctions suivantes ont des limites :

1. La fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, en 0.
2. La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^3)}{\sqrt{x}}$, en $+\infty$.
3. La fonction $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$, en $+\infty$. On pourra d'abord chercher une minoration du type $\sin \theta \geqslant C\theta$ pour θ dans un voisinage de 0^+, avec C une constante dans $]0, 1[$.
4. La fonction $x \mapsto \ln(x) \times \operatorname{sh}(\frac{1}{x})$ en $+\infty$. Et $x \mapsto \ln(x) \times \operatorname{ch}(\frac{1}{x})$?
5. La fonction $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{2t}}{t}\, dt$ en 0^+ (technique puissante qui sera généralisée en 2e année).

Proposition 27 - Théorème de la limite monotone. Soit $I =]a, b[$ un intervalle, et soit $f :]a, b[\to$ une fonction croissante. Alors

1. Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b.
2. Si f n'est pas majorée, alors f tend vers $+\infty$ en b.
3. Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a
4. Si f n'est pas minorée, alors f tend vers $-\infty$ en a.

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.

En résumé, une fonction monotone admet des limites aux bornes de l'intervalle. Attention, ce théorème ne vous donne pas la valeurs des limites.

Exemple 28 - Une intégrale mystérieuse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Montrer que la fonction f admet une limite en $+\infty$ (on pourra au préalable montrer que $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ si $t \geqslant 1$).

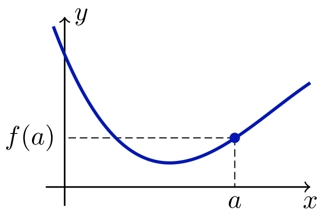
2 Fonction continue en un point

2.1 Définition

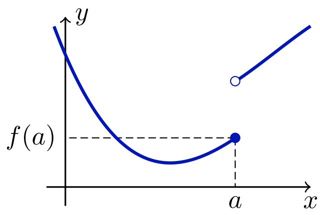
Du point de vue graphique une fonction est continue en un point a, lorsque quand l'abscisse x se rapproche de a, par la droite ou par la gauche, $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

Définition 29 - Continuité. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. La fonction f est dite *continue en* a lorsque $\lim\limits_{a} f = f(a)$.
La continuité de f en a s'exprime donc par :

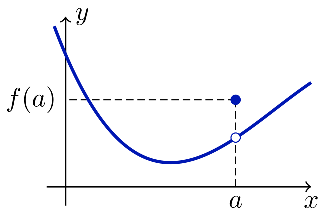
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Exemple 30 La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, montrons que $x \mapsto |x|$ est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $||x| - |a|| \leqslant |x-a|$, d'après l'inégalité triangulaire, ainsi, pour $\eta = \varepsilon$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \eta \implies ||x| - |a|| < \varepsilon.$$

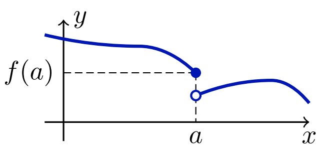
Exemple 31 Montrer que les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont continues en tout point de leur ensemble de définition. Faire de même pour la fonction $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ (plus technique).

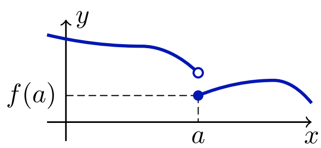
Remarque 32 Pour évoquer la continuité d'une fonction f en a, il est nécessaire que f soit définie en a.

Définition 33 - Continuité à gauche/à droite en un point. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- La fonction f est dite *continue à gauche en* a lorsque $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, *i.e.* lorsque $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$.
- La fonction f est dite *continue à droite en* a lorsque $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, *i.e.* lorsque $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$.

f est continue en a à gauche, mais pas à droite.



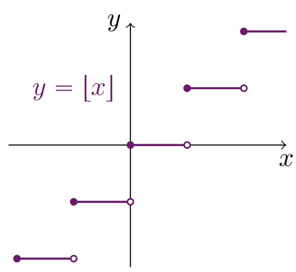


f est continue en a à droite, mais pas à gauche.

Le résultat suivant est un analogue d'un résultat les limites d'une fonction.

Théorème 34 - Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

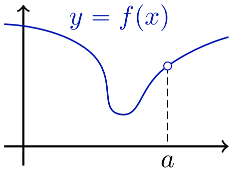
Exemple 35 La fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue en tout point non entier, mais seulement continue à droite en tout point entier.
En effet, examinons la continuité en un point entier $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$, ainsi $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$ et $\lfloor\cdot\rfloor$ est donc continue à droite en n. Au contraire, pour tout $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$, ainsi $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq n = \lfloor n \rfloor$ et $\lfloor\cdot\rfloor$ n'est donc pas continue à gauche en n.

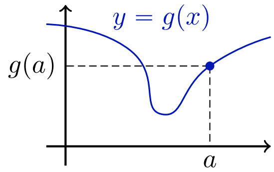


2.2 Prolongement par continuité en un point

Définition-théorème 36 - Prolongement par continuité en un point.

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
La fonction f est dite *prolongeable par continuité en a* lorsque $\lim\limits_a f$ existe ET EST FINIE. Le prolongement g de f obtenu en posant $g(a) = \lim\limits_a f$ est alors continue en a.





Les fonctions f et g sont distinctes en toute rigueur, puisqu'elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement, par souci de simplicité, de noter encore f le prolongement g.

Démonstration. ... ■

Exemple 37

- La fonction $x \longmapsto x \ln x$, initialement définie sur $]0, +\infty[$, n'est pas définie en 0, mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, puisque, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$, initialement définie sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas définie en 0, mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0, puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
- Pour $\alpha > 0$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi en posant $0^\alpha = 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 38 - Caractérisation séquentielle de la continuité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

Proposition 39 - Opérations sur les fonctions continues.
Soit $a \in I$, ainsi que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a. Alors

- Les fonctions $f + g$, λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues en a.
- Si $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Soit $a \in I$, ainsi que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$ deux fonctions continues respectivement en a et $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

3 Continuité sur un intervalle

D'un point de vue qualitatif, une fonction est *continue* sur un intervalle lorsque l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon, autrement dit lorsque sa courbe représentative est en un seul morceau.

Définition 40 - Continuité sur intervalle. La fonction f est dite *continue sur I* lorsqu'elle est continue en tout point de I. On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ (ou des fois $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Définition 41 - Continuité sur intervalle. Soit I un intervalle, et f et g deux fonctions continues sur I. Alors

- Les fonctions $f + g$, λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues sur I.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est continue là où g ne s'annule pas.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$ deux fonctions continues. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 42 Par opérations, les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ et les quotients de polynômes (appelés fractions rationnelles) sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

✎ **En pratique** ✎ Toutes les fonctions “usuelles” sont continues sur leur ensemble de définition, sauf la partie entière. Pour le prouver, il nous manque le théorème de continuité des fonctions réciproques (voir fin du chapitre), puisque de nombreuses fonctions sont définies en tant que tel.

Exemple 43 La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2+\mathrm{e}^{1/x}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.
En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par composition, $x \longmapsto \mathrm{e}^{1/x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction polynomiale $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$ et, par somme, $x \longmapsto x^2+\mathrm{e}^{1/x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2+\mathrm{e}^{1/x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi, par composition, $x \longmapsto \ln\left(x^2+\mathrm{e}^{1/x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

✎ **En pratique** ✎ Bien entendu, on ne refera pas cette longue preuve pour chaque fonction donnée par une formule, et on pourra affirmer qu'une fonction est continue en tant que produit, quotient et/ou composée de fonctions usuelles, à condition de se concentrer sur les points délicats (les ensembles de définitions, les dénominateurs qui pourraient s'annuler, etc...).

Fonctions définies par morceaux. Un traitement spécifique doit en revanche être mis en œuvre pour les fonctions *définies par morceaux*, pour lesquelles, outre la continuité sur chaque intervalle, il faut s'assurer de la continuité aux points de jonction.

Exemple 44 Étudions la continuité de la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \leqslant 2,\\ -\dfrac{1}{2}x+4 \text{ si } x>2.\end{cases}$$

Comme la fonction f est une fonction polynomiale sur chacun des intervalles $]-\infty\,,2]$ et $]2\,,+\infty[$, elle est continue sur ces intervalles. Toutefois, même si la réunion de ceux-ci est $\mathbb{R}$ tout entier, on ne peut pas en conclure directement que f est continue sur $\mathbb{R}$, puisque cela pourrait ne pas être le cas ! À ce stade, on peut seulement affirmer que f est continue sur $]-\infty\,,2[\cup]2\,,+\infty[$.
Pour étudier la continuité de f au point de raccordement 2, il faut revenir à la définition de la continuité en un point. Or $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x+1=3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} -\dfrac{1}{2}x+3=3$ et $f(2)=2+1=3$. Ainsi f est aussi continue en 2. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 45 Étudiez la continuité de la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0,\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

4 Trois théorèmes de continuité globale

La *continuité globale* désigne la continuité sur un intervalle – par opposition à la *continuité locale* en un point. Dans ce théorème on étudie des conséquences de la continuité globale.

4.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 46 - Théorème des valeurs intermédiaires, version « existence d'un antécédent ».
Soit f continue sur un segment $[a,b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.
En d'autre terme, y possède AU MOINS un antécédent par f dans $[a\,,b]$.

Démonstration. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f(a) \leqslant f(b)$. Procédons par dichotomie. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et l'on va construire par récurrence, à partir de l'intervalle $[a_0\,,b_0] = [a\,,b]$, de nouveaux intervalles plus petits localisant un antécédent de y. Précisément, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait déjà construit des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ tels que

- **(i)** $a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \quad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b \quad$ et, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$;
- **(ii)** pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $f\left(a_k\right) \leqslant y \leqslant f\left(b_k\right)$.

On définit alors au rang $n+1$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant y, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y. \end{cases}$$

Dans la mesure où $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ est le milieu du segment $[a_n\,,b_n]$, les réels a_{n+1} et b_{n+1} satisfont les assertions **(i)** et **(ii)** au rang $n+1$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes d'après **(i)** et possèdent donc une limite finie commune $x \in [a\,,b]$. Il suffit alors de passer à la limite dans **(ii)**, ce qui est autorisé par continuité de f, pour obtenir $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$ et donc $y = f(x)$. ■

Remarque 47 Le théorème des valeurs intermédiaires assure que si y est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in [a,b]$ possède au moins une solution. La dichotomie fournit même un procédé effectif de résolution approchée permettant d'obtenir un encadrement d'une solution aussi précis que l'on veut, dans le sens où il s'agit d'un algorithme que l'on peut mettre en place.

Exemple 48 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ s'annule sur $\mathbb{R}$.
Prêt(e) pour un énoncé plus général ? Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$.

Le TVI s'énonce de façon équivalente sous la forme suivante.

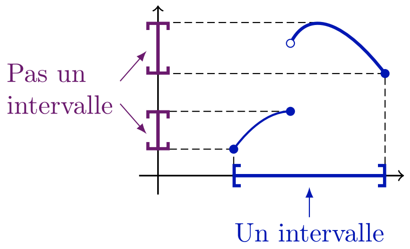
Théorème 49 - Théorème des valeurs intermédiaires, version « image d'un intervalle ».
L'image d'un INTERVALLE par une fonction continue est un INTERVALLE.

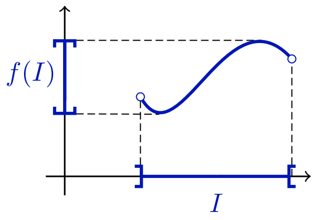
Démonstration. Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Considérons $u, v \in f(I)$, avec $u \leqslant v$, et montrons que $[u\,,v] \subset f(I)$. Soit $y \in [u\,,v]$. Par hypothèse, il existe $a, b \in I$ tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$. La version précédente du TVI assure alors l'existence de x entre a et b tel que $y = f(x)$. En particulier, puisque I est un intervalle, $x \in I$ et donc $y = f(x) \in f(I)$. ■

Remarque 50 Le théorème 49 implique clairement le théorème 46. En effet, avec les notations du théorème 46, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, on a $y \in [\min\{f(a), f(b)\}\,, \max\{f(a), f(b)\}] \subset f([a\,,b])$, puisque $f([a\,,b])$ est un intervalle.

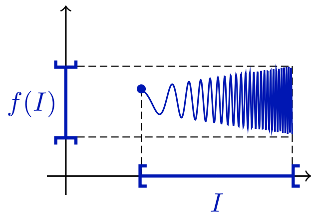
✖ Attention ! ✖

- Il suffit d'un point de discontinuité pour que le TVI tombe en défaut.
- Le TVI affirme que l'image continue $f(I)$ d'un intervalle I est également un intervalle, toutefois I et $f(I)$ ne sont pas a priori de même nature, par exemple si $f(x) = x^2$, on a $f([-1,1[) = [0,1]$.





I ouvert et $f(I)$ fermé.



I semi-ouvert et $f(I)$ ouvert.

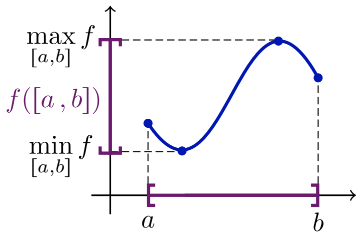
4.2 Le théorème des bornes atteintes

Théorème 51 - Théorème des bornes atteintes. On a les deux résultats suivants :

(i) Une fonction continue sur un SEGMENT $[a,b]$ y est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* admet un minimum et un maximum.

(ii) L'image d'un SEGMENT par une fonction continue est un SEGMENT. Précisément, si f est continue sur $[a\,,b]$, alors $f\left([a\,,b]\right) = [m\,,M]$, où $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

Démonstration. L'équivalence entre **(i)** et **(ii)** est claire, via le TVI. La preuve d'un de ces deux points est hors programme. ■



Nous avons observé que la continuité ne préserve pas la forme d'un intervalle en général. Toutefois, le théorème précédent affirme qu'un segment est toujours transformé en un segment par une fonction continue.

✖ Attention ! ✖ Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée, *e.g.* la fonction inverse sur $]0\,,1]$.

Exemple 52 La fonction $f : x \longmapsto x \ln x$ possède un minimum sur $]0\,,1]$.

4.3 Théorème de la bijection, continuité d'une réciproque

Le TVI est un théorème d'« existence » : il garantit l'existence d'un antécédent de par f ou, de façon équivalente, d'une solution à l'équation $y = f(x)$ pour la donnée de y dans l'image de f. Pour obtenir en plus l'unicité, une condition suffisante réside dans la stricte monotonie de f.

Théorème 53 - Théorème de la bijection.

- Si I est un INTERVALLE et f une fonction CONTINUE et STRICTEMENT MONOTONE sur I, alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
- Dans ces conditions, la réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens de variation que f, sur $f(I)$.

Démonstration.

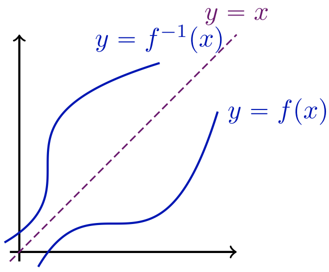
- D'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle. En outre, par stricte monotonie, f est injective sur I et donc bijective de I sur $f(I)$.
- **Stricte monotonie.** Supposons f strictement croissante sur I et montrons qu'il en va de même de f^{-1} sur $f(I)$. Soit $y_1, y_2 \in f(I)$ avec $y_1 < y_2$. Par injectivité de f^{-1}, $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ et, par l'absurde, si $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, alors, par stricte monotonie de f, $y_1 = f\left(f^{-1}(y_1)\right) > f\left(f^{-1}(y_2)\right) = y_2$ – absurde ! Ainsi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, comme souhaité.

  Continuité. Montrons que f^{-1} est continue sur J, en supposant par exemple f strictement croissante sur I.
  Soit $y_0 \in J$. Il existe $x_0 \in I$ tel que $y = f(x_0)$. Supposons que x_0 n'est pas une borne de I. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. On a donc $y_1, y_2 \in J$ et $y_1 < y_0 < y_2$, par stricte croissance de f, ce qui permet de définir $\eta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} > 0$. On a alors

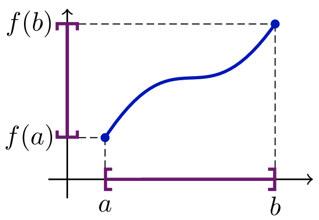
  $$\forall y \in J, \quad |y - y_0| < \eta \implies y_1 < y < y_2 \implies x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \iff \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon,$$

  par stricte croissance de f^{-1} sur J, ce qui exprime la continuité de f^{-1} en y_0.
  Si x_0 est une borne de l'intervalle I, on modifie légèrement la démonstration, en considérant $[x_0\,, x_0 + \varepsilon]$ ou $[x_0 - \varepsilon\,, x_0]$ au lieu de $[x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon]$. ■

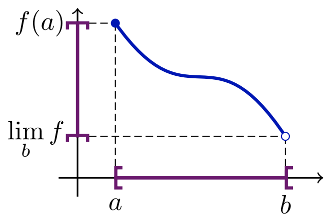
Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice. Si le graphe de f peut être tracé sans que l'on ait à lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le serait-il pas ?



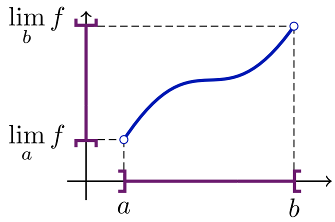
Remarque 54 Selon la nature de I et la monotonie de f, l'obtention de $f(I)$ varie, *e.g.* pour deux réels $a < b$,



$I = [a\,, b]$ et $f(I) = [f(a)\,, f(b)]$.



$I = [a\,, b[$ et $f(I) =]\lim_b f; f(a)]$.



$I =]a\,, b[$ et $f(I) =]\lim_a f; \lim_b f[$.

Il existe bien sûr d'autres versions selon que f est strictement croissante ou décroissante et définie ou non en a et b, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Exemple 55

- La fonction logarithme népérien est définie comme la réciproque de la fonction exponentielle. Or la fonction exponentielle à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc
- La fonction arctangente est définie comme la réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Elle est donc, à l'instar de la fonction tangente à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56 - Fonctions puissances.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction racine n^{e} est définie comme la réciproque de la fonction puissance $f : x \longmapsto x^n$ restreinte à $\mathbb{R}_+$. Elle est donc, à l'instar de la fonction $f|_{\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On note $x^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{x}$ l'image de x par f^{-1}. Le cas $n = 2$ correspond à la fonction racine carrée.
- Si n est un entier naturel impair, la fonction $x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la racine n^{e} sur $\mathbb{R}$. Le cas $n = 3$ correspond à la racine cubique $\sqrt[3]{\cdot}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Plus généralement, la fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ – elle est continue et strictement croissante (resp. décroissante) si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$). Sa bijection réciproque est $x \longmapsto x^{1/\alpha}$.

5 Extension au cas complexe

Dans cette section on donne un bref aperçu de comment généraliser les définitions et résultats aux fonctions à valeurs complexes. Comme souvent, un résultat important sera de lier la continuité d'une telle fonction avec ses parties réelles et imaginaires, mais nous perdrons la plupart des propriétés liées à l'absence de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, qui peuvent devenir faux, comme le TVI ou les théorèmes d'encadrement.

Définition 57 - Limite d'une fonction à valeurs complexes. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Pour un nombre complexe ℓ, les définitions 2 et 6 s'adaptent, à la différence que $|f(x) - \ell|$ désigne cette fois-ci le module au lieu de la valeur absolue.

✎ **En pratique** ✎ On a donc :

$$\lim_{t\to a} f(t) = \ell \iff \lim_{t\to a} |f(t) - \ell| = 0.$$

Ne pas hésiter à calculer $|f(t) - \ell|$ et à étudier sa limite, ce qui est assez rapide dans les cas où $\ell = 0$.

Exemple 58 - Exemple de limite complexe. Dire si les fonctions à valeurs complexes suivantes ont des limites :

1. La fonction $t \mapsto \frac{it-i}{t^2+t(i-1)-i}$ en 1.
2. La fonction $t \mapsto \frac{te^{it}}{t^2+2}$ en $+\infty$.
3. On rappelle que pour un physicien, $j^2 = -1$ est le nombre i de M. Popoff. On fixe H, Q et ω_0 dans $]0, +\infty[$. Soit la fonction de transfert $H :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par

$$H : \omega \mapsto \frac{H_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}.$$

Etudier la limite de H lorsque ω tend vers 0 ainsi que lorsque ω tend vers $+\infty$.

✖ **Attention !** ✖ Comme pour les suites, il n'y a aucun sens à dire qu'une fonction à valeurs complexes tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Ainsi, la fonction $t \mapsto it$ n'a pas de limite en $+\infty$ dans le cadre de notre cours.

Exemple 59 - Limite du module. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction qui tend vers une limite ℓ en un point a, éventuellement infini. Montrer que $|f|$ tend vers $|\ell|$ en a.

Proposition 60 - Lien entre limite et parties réelles et imaginaires.. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit un point a dans I ou au bord de I, éventuellement infini. Alors on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

✎ **En pratique** ✎ Cette définition donne une méthode claire pour étudier les limites d'une fonction à valeurs complexes : il faut écrire $f = f_1 + if_2$, où f_1 e f_2 sont à valeurs réelles, et vérifier si f_1 ET f_2 ont une limite en a.

Exemple 61 - Retour sur un exemple. Reprenez l'exemple 58 en étudiant cette fois sa parties réelle et sa partie imaginaire.

Exemple 62 - Un point qui tourne. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par $f(t) = e^{it}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? et $|f|$?

Les propositions 16 et 63 restent vraies pour le cas complexe :

Proposition 63 - Unicité de la limite et caractère borné. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ un point dans I ou à une de ses extrémités. Si f admet une limite en a, alors

- Cette limite est unique,
- La fonction est bornée dans un voisinage de a.

On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est bornée si et seulement si la fonction $|f| : I \to \mathbb{R}$ est bornée.

Continuité des fonctions à valeurs complexes La plupart des définitions et propriétés des fonctions s'étendent aux fonctions à valeurs complexes. Le TVI par contre ne se généralise pas.

Définition 64 - Continuité d'une fonction à valeurs complexes. Les notions de continuités s'adaptent pour les fonctions à valeurs complexes : une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, et elle est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

On utilise directement le critère sur la forme algébrique de la fonction :

Proposition 65 - Continuité d'une fonction à valeurs complexes. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in I$ (resp. sur I) si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en $a \in I$ (resp. sur I).

Exemple 66 - Valeurs interdites (ou pas). La fonction $t \mapsto \frac{2it-1}{t-i}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Voici la plus importante des extensions des résultats vus pour le cas réel :

Proposition 67 - Les fonctions continues sur un segment sont bornées. Une fonction à valeurs complexes continue sur un segment est bornée.

✖ **Attention !** ✖ Par contre, le TVI ne fonctionne plus : essayer de l'appliquer à la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur $[0, \pi]$ pour voir ce qui ne va pas.