Chapitre 12 - Matrices : première approche

1 Les matrices et leurs opérations

Dans ce qui suit, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cela signifie que la théorie est valable dans les deux cadres, et que l'on précisera selon le contexte si on travaille avec des nombres uniquement réels, ou complexes.

Définition 1 - Matrices. Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$. On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée sur $[\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,p]\!]$. Etant donnée une telle famille $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ on la représente sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes, dans lequel l'élément a_{ij} est placé dans la case sur la ligne i la colonne j. Ce tableau est une matrice. Si on l'appelle A, on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On peut écrire $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Définition 2 - Ensembles des matrices. On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. En particulier :

- Lorsque $p = n$, on parle de matrices carrées. On note $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées.
- Lorsque $n = 1$, on parle de matrices lignes.
- Lorsque $p = 1$, on parle de matrices colonnes.

On note $0_{M_{n,p}}$ (ou 0 si pas d'ambigüité) la matrice nulle, dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 3 - Combinaisons linéaires de matrices. Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$, et soient A et B dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour λ et μ dans $\mathbb{K}$, on définit $\lambda A + \mu B$ comme étant la matrice $(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

✎ **En pratique** ✎ On peut donc ajouter (ou multiplier par des nombres) des matrices : il suffit de faire ces opérations « composantes par composantes ». Comme pour des vecteurs finalement ... Attention ! les matrices doivent avoir la même taille !

Exemple 4 - Combinaisons linéaires de matrices. Calculer

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La définition suivante est beaucoup plus subtile :

Définition 5 - Produit de matrices. Soient n, p et q dans $\mathbb{N}^*$. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit $A \times B = AB$ comme étant la matrice $(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!]\,, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

✖ **Attention !** ✖

- Ce produit est bien défini lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, autrement il n'a aucun sens. C'est une source majeures d'erreur. Ce nombre commun (p dans la définition) « disparait » dans la création de la matrice AB. D'ailleurs on ne peut pas en général faire le produit BA.
- Le produit AB n'est pas la matrice dont les coefficients sont les produits des coefficients de A et B : ne soyez pas naïfs et ne faites pas le produit composantes par composantes.
- Comme on va le voir, le produit matriciel est non commutatif. Ainsi, si on multiplie une matrice A par une matrice B, on précisera si on le fait « à gauche » (et cela donne BA) ou « à droite » (et cela donne AB). Et bien sûr, encore faut-il que ces produits aient un sens (les deux ont en un si les matrices sont carrées).

✎ **En pratique** ✎ Cette définition nécessite relecture est mise en pratique. Commençons par noter plusieurs points :

- Il existe une méthode visuelle pour faire ce produit (voir note de cours) : pour fabriquer le coefficient (i,j) du produit AB, on sélectionne la ligne i de A (qui a p composantes) et on fait le produit composante par composante avec la colonne j de B (qui a aussi p composantes). Ensuite on ajoute le tout. On peut penser à un produit scalaire (idée que nous développerons plus tard).
- Notez aussi une espèce de règle de Chasles dans le produit composante par composante « $a_{ik}b_{kj}$ » où l'indice disparait pour laisser place au terme c_{ij} après sommation. Et n'oubliez pas que l'indice de sommation est muet !

Pourquoi cette formule aussi complexe ? Cela apparaitra bientôt en lien avec les système linéaire, et ressurgira de manière profonde dans le chapitre sur les applications linéaires.

Exemple 6 - Produit de deux matrices. Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ -4 & 7 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'exercice suivant montre à quel point le produit des matrices diffèrent du produit des nombres que vous connaissez :

Exemple 7 - Produit de deux matrices carrées. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuer les produits AB et BA. Que constatez-vous ? On dit que le produit matriciel est *non commutatif*.
Calculer A^2. Que remarquez-vous ?

✖ **Attention !** ✖ Comme on vient de le voir, l'équivalence $AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$ est FAUSSE chez les matrices. C'est un point très subtil du produit des matrices qui aura une interprétation très profonde au prochain semestre.

Proposition 8 - Combinaison linéaire des colonnes. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on note C_j la j-ième colonne de A. Soit $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant p} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $AX \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, et on a

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j.$$

Proposition 9 - Associativité et distributivité. Soient A, B et C des matrices avec les tailles qui vont bien. Alors :

- Le produit matriciel est associatif : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- Le produit matriciel est bilinéaire : pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a
$$A \times (\lambda B + \mu C) = \lambda A \times B + \mu A \times C$$
et
$$(\lambda A + \mu B) \times C = \lambda A \times C + \mu B \times C.$$

Il existe des matrices particulièrement faciles à manipuler : celles qui n'ont qu'un seul coefficient non nul. Pour mieux les décrire, on introduit une notation très utile :

Définition 10 - Symbole de Kronecker. Etant donnés deux indices i et j, on note
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition-Proposition 11 - Matrices élémentaires E_{ij}. Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$, et $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On définit la matrice $E_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ comme la matrice ayant le coefficient 1 en position (i, j) et des 0 ailleurs :
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \substack{\text{col}\\ j} & & \end{array} \\ \text{lig } i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$
Avec les notations de Kronecker, on a $E_{ij} = (\delta_{ia}\delta_{jb})_{\substack{1 \leqslant a \leqslant n \\ 1 \leqslant b \leqslant p}}$.

On a les propriétés suivantes :

- Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on a
$$A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{ij} E_{ij}.$$
- Soient $E_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{kl} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices élémentaires. Alors on a
$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

En quelques sortes, ces matrices élémentaires sont des briques de bases qui permettent de décomposer une matrice quelconque à partir de ses coefficients. On parle de *base*, notion que l'on explorera au second semestre.

Définition 12 - Matrice transposée. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on définit la transposée de A, notée A^{T}, par $A^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$

✎ **En pratique** ✎ Transposer consiste à intervertir les colonnes et les lignes (en échangeant au passage leur nombre).

Exemple 13 - Transposer des matrices. Calculer les transposées des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ -4 & 7 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 14 - Linéarité de la transposition. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on a

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, on a $(\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}$.
- On a $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.
- On a (avec les tailles qui vont bien) : $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Dans certains livres, on pourra trouver la notation ${}^{\mathrm{t}}A$ pour la transposée.

Définition 15 - Matrice identité. On appelle matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ la matrice carrée diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On la note I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voilà LA raison pour laquelle cette matrice s'appelle l'identité :

Exemple 16 - Matrice identité. Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \quad I_n A = A I_n = A.$$

Les matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées « matrices scalaires ».

2 Systèmes linéaires et représentation matricielle

2.1 Lien entre un système linéaire et des matrices

On se donne $n \times p$ nombres $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, appelés coefficients, et n autres nombres $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, appellés *données* (ou *seconds membres*). On s'intéresse au système de n équations à p inconnues suivants :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & + a_{np}x_p & = b_n \end{array} \right. \tag{1}$$

où les inconnues sont les nombres $(x_j)_{j=1\dots,p}$.

La proposition suivante est cruciale est montre toute l'importance du calcul matriciel :

Proposition 17 - Mise sous forme matricielle d'un système linéaire. Etant donné le système (1), on introduit la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ des coefficients et la matrice colonne $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ des seconds membres. Alors, en posant $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, le système (1) est équivalent au système *matriciel*

$$AX = B,$$

d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Ainsi, un système de n équations à p inconnues a été réduit à une seule équation (matricielle), avec une seule inconnue (une colonne). Cette vision ne permet pas de tour de magie pour résoudre le système, mais va nous permettre d'avoir un angle d'attaque plus global.

Définition-Proposition 18 - Système compatible. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le système $AX = B$, d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, est dit *compatible* lorsqu'il admet des solutions.
Un système est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Notez qu'on n'a pas encore donné de méthode pratique pour montrer qu'un système est compatible !

Définition-Proposition 19 - Système homogène associé et théorème de superposition. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, et considérons le système

$$AX = B, \tag{2}$$

d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. On suppose que ce système est compatible.
On lui associe le système homogène

$$AY = 0, \tag{3}$$

d'inconnue $Y \in M_{p,1}(\mathbb{K})$.
Supposons que l'on connaisse une solution X_0 du système (2). Alors l'ensemble des solutions de (2) est la superposition de cette solution particulière et des solutions du système homogène :

$$X \text{ est solution de (2)} \iff X = X_0 + Y \text{ avec } Y \text{ solution de (3)}$$

2.2 Opérations élémentaires matricielles

Cette section technique montre comment traduire les opérations vue sur les lignes d'un système avec des matrices.

Définition 20 - Matrices des opérations élémentaires. On définit les matrices d'opérations élémentaires suivantes :

- Matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ avec un i un entier entre 1 et n. Le i-ième coefficient diagonal de I_n a été échangé avec $\lambda \neq 0$. Elle est de la forme :

- Matrice de permutation P_{ij} avec $i \neq j$ deux entiers entre 1 et n. Les lignes i et j de I_n ont été permutées. Elle est de la forme :

- Matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ avec $i \neq j$ deux entiers entre 1 et n. Le coefficient hors diagonal (i,j) a été remplacé par $\lambda \neq 0$. Elle est de la forme :

Exemple 21 - Expression algébrique en fonction des E_{ij}. Ecrire les matrices précédentes en fonction de la matrice identité et des matrices E_{ij}.

Proposition 22 - Effet du produit à gauche par une matrice élémentaire. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ fixée.

- Soit $D_i(\lambda) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de dilatation. Alors la matrice $D_i(\lambda)A$ est déduite de A en multipliant la ligne i de A par λ. On peut noter cette opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Soit $P_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de permutation Alors la matrice $P_{ij}A$ est déduite de A en échangeant les lignes i et j de A. On peut noter cette opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Soit $T_{ij}(\lambda) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de transvection Alors la matrice $T_{ij}(\lambda)A$ est déduite de A en ajoutant λ fois la ligne j de A à la ligne i. On peut noter cette opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Définition-Proposition 23 - Opération sur les lignes. Lorsqu'on multiplie à gauche une matrice A par des matrices d'opérations élémentaires, alors les opérations ont lieu sur les lignes de A. On obtient une matrice qui est dite *équivalente*

Définition-Proposition 24 - Opération élémentaire sur la matrice d'un système.. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, et considérons le système $AX = B$ d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A revient à effectuer ces opérations sur les lignes du système $AX = B$, et on ne change pas l'ensemble des solutions.

2.3 Résolution par pivot

Définition-Proposition 25 - Pivot de Gauss. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, et considérons le système $AX = B$ d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$.
Alors on peut appliquer l'algorithme du pivot vu dans le cadre des systèmes de 3 équations à 3 inconnues. De plus :

- Si le système est compatible, l'algorithme aboutit à un système échelonné d'équations définissant les solutions du système. On peut « remonter » le pivot par le bas.
- Si le système n'est pas compatible, l'algorithme aboutit à une équation contradictoire.

On constate que l'algorithme du pivot peut être mené sur le système $AX = B$, et qu'il fournit instantanément les solutions du système homogène associé, car si $B = 0$, tous les seconds membres obtenus sont nuls. En pratique, on peut aussi obtenir directement les solutions du système avec second membre en appliquant le pivot à $AX = B$ et ignorer l'équation homogène, le théorème de superposition a en fait une importance théorique que nous exploiterons plus tard.

Théorème 26 - Nombre de solutions d'un système linéaire. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, et considérons le système $AX = B$ d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$.
Alors on a la disjonction de cas suivante

- Ou bien le système n'a pas de solution,
- Ou bien le système a une unique solution,
- Ou bien il a une infinité de solutions.

Exemple 27 - Trop d'équations... ou pas !.

1. Appliquer le pivot pour résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 2y - 3z = & 4 \\ x + 3y + z = & 11 \\ 2x + 5y - 4z = & 13 \\ 4x + 11y \quad = & 37 \end{cases}$
2. Même question (discuter selon $a \in \mathbb{R}$) : $\begin{cases} x + 2y - 2z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases}$.

3 Matrices carrées

3.1 Propriétés algébriques des matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que l'on note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 28 - Diagonale d'une matrice carrée. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle diagonale de A les coefficients $(a_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant n}$

Définition 29 - Matrices diagonales et triangulaires. Les sous-ensembles suivants de $M_n(\mathbb{K})$ vont jouer un rôle particulier :

- (Matrices diagonales). On appelle *matrice diagonale* tout matrice carrée $D \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme
$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$
c'est-à-dire toute matrice dont les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls. On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- (Matrices triangulaires supérieures). On appelle *matrice triangulaire supérieure* tout matrice carrée $T \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme
$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$
c'est-à-dire toute matrice dont les coefficients strictement sous la diagonale sont nuls.
- Définition similaire pour les *matrices triangulaires* inférieures.

Exemple 30 - Exemples de matrices diagonales et triangulaires.

- $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale.
- $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Quelques remarques visuelles assez évidentes :

Remarque 31 - Liens entres ces différentes matrices.

- Une matrice est diagonale si et seulement si elle à la fois triangulaire supérieure et inférieure.
- Une matrice A est triangulaire supérieure si et seulement si A^{T} est triangulaire inférieure.
- En termes mathématiques, une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure lorsque
$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2, \quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$
On a une caractérisation similaire pour une matrice triangulaire inférieure.

Proposition 32 - Stabilité par produit des combinaisons linéaires. Les matrices triangulaires inférieures, supérieures et diagonales sont trois ensembles stables par combinaison linéaire et par produit :

- Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ diagonales, alors
$$AB \text{ est diagonale} \quad \text{et} \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda A + \mu B \text{ est diagonale}$$
- Même propriété pour les matrices triangulaires supérieures.
- Même propriété pour les matrices triangulaires inférieures.

On peut retenir de la preuve que le produit de deux matrices diagonales est très facile à faire : soient

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

deux matrices diagonales. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} d_1\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n\lambda_n \end{pmatrix}$$

Définition 33 - Matrices symétriques et antisymétriques. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on définit les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{K})$ suivants :

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique lorsque $A^{\mathrm{T}} = A$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.
- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsque $A^{\mathrm{T}} = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemple 34 - Matrices symétriques et antisymétriques. Exhiber une matrice symétrique et une matrice antisymétrique de taille 3×3.
Que dire de la diagonale d'une matrice antisymétrique ?

Exercice 35 - Produit de matrices symétriques. Donner une CNS pour que le produit de deux matrices symétriques soient encore symétriques.

Exercice 36 - Produit de matrices symétriques. Soit A une matrice symétrique. Montrer que $A^2 = 0$ implique que $A = 0$.

Définition 37 - Puissance d'une matrice. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors on définit la puissance p-ième d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ par

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad \text{et} \quad A^p = A \times \dots \times A = \prod_{p=1}^{p} A = A \times A^{p-1}.$$

On a :

$$\forall (p,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad A^{p+s} = A^p A^s.$$

✖ **Attention !** ✖ Sans hypothèses supplémentaires, il est impossible de trouver une formule général pour les coefficients de A^p.

Exemple 38 - Exemples de puissances. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer les puissances p-ième des matrices suivantes :

1. Une matrices diagonale. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 39 - Identités remarquables et binôme de Newton. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$, alors les identités remarquables standard sont valides, en particulier

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Les matrices scalaires commutent avec toutes les autres matrices, autrement on pourra montrer manuellement que $AB = BA$ pour vérifier que deux matrices commutent.

Exemple 40 - Exemples de puissances. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ecrire A sous la forme $\lambda I_3 + N$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in M_3(\mathbb{R})$ à choisir. En déduire les puissances de A.

3.2 Matrices carrées inversibles

Définition 41 - Matrices inversibles. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

La matrice B est alors unique, et est appelée inverse de A. On la note $B = A^{-1}$.

✎ **En pratique** ✎ En pratique, il suffit d'avoir une seules des égalités, par exemples $AB = I_n$, pour que l'autre soit automatiquement vraie, et donc que B soit l'inverse de A. Ceci est non trivial, on le prouvera plus tard. En attendant, retenez que si vous trouvez B tel que $AB = I_n$ OU $BA = I_n$, vous pouvez conclure que B est bien l'inverse de A sans vérifier l'autre égalité.

✖ **Attention !** ✖ On évitera d'écrire $\frac{1}{A}$: cette notation n'a aucun sens.

Exemple 42 - Exemples d'inverse.

- Montrer que I_n est inversible et donner son inverse.
- Pour $B \in M_n(\mathbb{K})$, calculer $0 \times B$, et en déduire que la matrice nulle n'est pas inversible.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0$. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que la matrice A de l'exercice 7 n'est pas inversible.

Définition-Proposition 43 - Structure des matrices inversibles (groupe linéaire). On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$. Cet ensemble est parfois appelé « groupe linéaire ». En particuier

- On a $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$.
- (Inverse du produit). Soient A et B dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$, et on a
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
- (Inverse de l'inverse et de la transposée). Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$, et on a
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
On a également $A^{\mathrm{T}} \in GL_n(\mathbb{K})$, avec $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Proposition 44 - Inversibilité des matrices triangulaires et diagonales.

- Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses coefficient diagonaux sont non nuls. L'inverse est alors triangulaire supérieures.
- Résultat similaire pour les triangulaires inférieurs.
- Dans le cas particulier d'une matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}, \quad \text{on a de plus} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

Remarque 45 - Inverser une matrice. Inverser une matrice, c'est-à-dire trouver A^{-1}, est un problème dur et très étudié, il existe de nombreuses stratégies. A notre stade, on ne sait même dire si une matrice donnée est inversible (ce qui est une question dure en soi). Nous allons voir un premier outil avec le pivot de Gauss. Mais avant de voir comment faire, voyons.... à quoi cela sert !

Proposition 46 - Résoudre un système par la matrice inverse. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors les points suivants sont équivalents :

- La matrice A est inversible.
- Le système $AX = 0$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ n'admet que la solution nulle.
- Pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution.
- Pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ admet au moins une solution.

Lorsqu'une de ces conditions est vérifiée, la solution du système $AX = B$ est donnée par $X = A^{-1}B$.

✖ **Attention !** ✖ On l'a déjà vu et on le répète : il faut éviter le raisonnement faux « Si $AX = 0$, comme $A \neq 0$, alors $X = 0$ ». C'est l'inversibilité de A qui permet de justifier cette implication, qui est fausse si A n'est pas inversible.

✎ **En pratique** ✎ Il existe une mise en forme efficace pour inverser une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ donnée :

- On construit la matrice *augmentée* en accolant la matrice I_n à droite de A.
- On effectue des opérations élémentaires sur les lignes, puis sur les colonnes, pour transformer A en I_n, en suivant l'idée du pivot de Gauss. On effectue en parallèle ces mêmes opérations sur la matrice I_n.
- La matrice obtenue à droite de A est A^{-1}.

Voir les prises de note pour la pratique sur l'exemple suivant.

Exemple 47 - Inverser une matrice par l'alglorithme de Gauss-Jordan. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Une autre méthode, similaire, consiste à se donner un vecteur B quelconque, à résoudre le système $AX = B$, par exemple avec le pivot de Gauss. Les coordonnées de A^{-1} se lisent dans l'expression de X en fonction de B. Dans l'exemple précédent, on peut ainsi résoudre $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ 3x + 4y + 2z = c \end{cases}$, pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque.

Il n'y a pas de méthode magique, et il faudra effectuer des calculs à un moment. L'algorithme de Gauss-Jordan a l'avantage de pouvoir être programmé assez facilement.

Exercice 48 - En attendant le second semestre. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y + z \\ 3x + 4y + z \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est bijective, et donner sa bijection réciproque.