Chapitre 16 - Géométrie du plan

1 Différents modes de repérage

Définition 1 - Repère cartésien. On appelle repère cartésien du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan, et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
Le point O est appelé *origine du repère*, la droite passant par O orientée par le vecteur $\vec{i}$ est appelée *l'axe des abscisses*, et celle passant par O orientée par le vecteur $\vec{j}$ *l'axe des ordonnées.*

Définition 2 - Coordonnées cartésiennes. Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

De même, un point M étant identifié au vecteur $\overrightarrow{OM}$, on a :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple (x, y) sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La valeur x est l'abscisse de M et la valeur y l'ordonnée de M (sous-entendu : dans le repère...). On peut noter $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M = (x, y)$.

Proposition 3 - Unicité des coordonnées cartésiennes. Dans un repère fixé du plan, les coordoonnées cartésiennes sont uniques.

Exemple 4 - Changement de repère cartésien. Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et le point $A = (1, -3)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u} = (-1, 1)$ et $\vec{v} = (2, 1)$. Soit un point M de coordonnées (x, y).
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et donner les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 5 - Changement de repère cartésien. On aura bientôt des méthodes puissantes issues de l'algèbre linéaire pour changer de bases. .

On rappelle qu'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthonormal direct lorsque l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ vaut $\frac{\pi}{2}$, et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Les notions d'orthogonalité et de norme euclidienne sont celles des petites classes, nous les exprimerons bientôt avec le produit scalaire.

Définition-Proposition 6 - Coordonnées polaires : repère. Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle repaire polaire associé à θ le repère $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, où les vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sont définis par :

$$\begin{cases} u_r &= \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \\ u_\theta &= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}. \end{cases}$$

Il s'agit d'un repère orthonormal direct.

Le repère $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est déduit du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ après une rotation centrée en O d'angle θ.

Proposition 7 - Coordonnées polaires : vecteur radial. Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Alors,

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}.$$

Le couple (r, θ) sont des coordonnées polaires de M.

Remarque 8 - Lien avec la géométrie. Le nombre r est la distance à l'origine de M, il est unique. Le nombre θ est unique modulo 2π, il représente, lorsque $M \neq O$, l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\overrightarrow{i}$.
Quel lien faites-vous avec les complexes ?
Notez enfin que dans certaines circonstances on peut définir ces coordoonées avec $r \in \mathbb{R}$, ce qui offre la possibilité d'avoir $r < 0$. Utilisez $\cos \pi = -1$!

Le résultat suivant doit vous rappeler le chapitre sur les nombres complexes :

Théorème 9 - Lien entre les coordonnées polaires et cartésiennes. Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Soit $M \in \mathcal{P}$ NON NUL de coordonnées carésiennes (x, y) et de coordonées polaires (r, θ).

(i) Expressions des coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta.$$

(ii) Expressions des coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Exemple 10 - Changer de coordonnées.

1. Donner les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(2, -\sqrt{12})$.
2. Donner les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées polaires $(5\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$.

Exemple 11 - Une seule formule pour θ. Exprimer θ en grâce à la fonction Arctan en distinguant deux cas.

2 Produit scalaire

Définition-Proposition 12 - Norme euclidienne. Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$, de coordonnées cartésiennes (x, y). Alors on définit la norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$ comme

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ce nombre ne dépend pas du choix des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, il représante la distance entre l'origine et un point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.

Définition 13 - Produit scalaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 \quad \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}.$$

Remarque 14 - Lien avec la géométrie.

- (Lien avec la norme euclidienne). On a la formule
$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$
- Le produit scalaire de deux vecteurs et le produit des mesures algébriques (i.e. signées) de leurs projetés orthogonaux sur le support de l'un d'entre eux. En d'autres termes : soient 3 points O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). Alors, en orientant cette droite dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OA}$, on a $\overline{OA} = \|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{OH}$, d'où
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}.$$

Définition 15 - Bilinéarité et symétrie. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan ainsi que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est :

- Bilinéaire : $\begin{cases} \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{w} + \beta\vec{v} \cdot \vec{w} \end{cases}$.
- Symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Ces formules en apparence indigestes conceptualisent des règlent de calculs que vous connaissez déjà : commutativité et distributivité. Familiarisez-vous avec leur forme car nous les reverrons dans un cadre plus général.

Théorème 16 - Expression dans une base orthonormée. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées cartésiennes respectives (x, y) et (x', y') dans un repère cartésien orthonormé. Alors on a
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Encore une fois, la valeur du produit scalaire ne dépend pas du repère choisi, tant qu'il est orthonormé ! C'est une quantité *géométrique.*

Exemple 17 - Calculer des produits scalaires. Calculer $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Théorème 18 - Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$
avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

Vous vous souvenez de l'inégalité triangulaire pour les complexes ? La formule suivante doit vous renforcer dans l'idée que la norme d'une somme n'est pas la somme des normes, avec une vision géométrique.

Proposition 19 - Identité remarquable et polarisation. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$
On déduit la formule de *polarisation*
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

✎ **En pratique** ✎ La formule de polarisation permet de trouver le produit scalaire à partir de normes. Pensez que ces formules peuvent s'utiliser avec $\vec{u} - \vec{v}$ à la place de $\vec{u} + \vec{v}$

Proposition 20 - Orthogonalité et produit scalaire. Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

De nombreuses applications, en particuliers dans la section sur les droites du plan, vont arriver.

Exemple 21 - Pensez au milieu. Soient les points A et B, de coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 122$

3 Produit mixte dans le plan

Définition 22 - Produit mixte. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit mixte entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $[\vec{u}, \vec{v}]$ défini par

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}.$$

Remarque 23 - Lien avec la géométrie : aire d'un parallélogramme. Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre $|[\vec{u}, \vec{v}]|$ représente l'aire du paralélogramme engendré par ces vecteurs, avec la convention que cette aire est nulle si les vecteurs sont alignés.
De plus, le signe de $[\vec{u}, \vec{v}]$ indique une orientation : le parallélogramme est direct lorsque $[\vec{u}, \vec{v}] \geqslant 0$ et indirect sinon.

Définition 24 - Bilinéarité et antisymétrie. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan ainsi que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Le produit mixte sur $\mathbb{R}^2$ est :

- Bilinéaire : $\begin{cases} [\vec{u}, (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}] \\ [(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}), \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{w}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}] \end{cases}$
- Antisymétrique : $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$

Théorème 25 - Expression dans une base orthonormée directe. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées cartésiennes respectives (x, y) et (x', y') dans un repère cartésien orthonormé direct. Alors on a

$$[\vec{u}, \vec{v}] = xy' - x'y.$$

Quel objet déjà aperçu cela vous évoque-t-il ?

Proposition 26 - Alignement et produit mixte. Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alignés si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Exemple 27 - Avec le produit mixte. Soient les points A et B, de coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que A, B et M sont alignés.

Exemple 28 - Aire d'un triangle. Montrer que l'aire d'un triangle ABC est donnée par $\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.

4 Droites du plan

4.1 Différentes représentations

On se place jusqu'à la fin du chapitre dans un repère orthonormal direct.
On rappelle qu'une droite du plan est un ensemble de points, tous alignés.

Définition 29 - Vecteur directeur et vecteur normal. On appelle vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points quelconques de $\mathcal{D}$.
On appelle vecteur normal d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Notation 30 - De nombreux points de vue, de nombreuses notations. Une droite est déterminée par la donnée d'un des points suivants :

- Un point A et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$. On note $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$ où $\text{Vect}(\vec{u})$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ (on parle de droite vectorielle, cette notion reviendra bientôt en force).
- Deux points distincts A et B. On note alors $\mathcal{D} = (AB)$.
- Un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$ normal à la droite. On note $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{n})^\perp$, où $\text{Vect}(\vec{n})^\perp$ désigne l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$. Il s'agit de la droite vectorielle $\text{Vect}(\vec{u})$ avec les notations précédantes.

Proposition 31 - Paramétrage cartésien d'une droite. Soit la droite $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$, avec $A = (x_0, y_0)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Alors un paramétrage cartésien de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des réels}$$

Autrement dit, un point $(x, y) \in \mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $x = x_0 + \alpha t$ et $y = y_0 + \beta t$. Attention, le choix du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$ influe sur le paramétrage.

Exemple 32 - Représentation paramétrique.

1. Soient $A = (2, 3)$ et $B = (8, -5)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Que dire de la droite paramétrée par le sysème $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t, \\ y = 5 + t, \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, par rapport à (AB) ?

Proposition 33 - Equation cartésienne depuis un vecteur directeur. Soit la droite $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$, avec $A = (x_0, y_0)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Alors une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est donnée par $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = 0$:

$$\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) = 0.$$

Remarque 34

- Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a donc pour vecteur directeur le vecteur $(-b, a)$.
- Il est souvent pratique d'utiliser la caractérisation $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = 0$.

Exemple 35 - Représentation cartésienne.

1. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A = (2, 3)$ et $B = (8, -5)$.
2. Retrouver cette équation directement à partir de la représentation paramétrique trouvée à l'exemple 32

Proposition 36 - Equation cartésienne depuis un vecteur normal. Soit la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ c'est-à-dire $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{n})^\perp$, avec $A = (x_0, y_0)$ et $\vec{n} = (a, b)$. Alors une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est donnée $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Remarque 37

- Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a donc pour vecteur normal le vecteur (a, b).
- Il est souvent pratique d'utiliser la caractérisation $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Exemple 38 - Représentation cartésienne.

1. Donner une éqation cartésienne de la droite passant par $A = (2, 3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n} = (8, 6)$.
2. Retrouver cette équation directement à partir de la représentation paramétrique trouvée à l'exemple 32

Exemple 39 - Parallèles ou perpendiculaires ?.

1. Parmi les droites suivantes, dont on donne une représentation, dire lesquelles sont parallèles à $\mathcal{D}_1$:

$$\mathcal{D}_1 : 2x - 6y + 3 = 0, \quad \mathcal{D}_2 : -x + 3y + 2 = 0, \quad \mathcal{D}_3 : 3x - 5y + 4 = 0, \quad \mathcal{D}_4 : \begin{cases} x = 4 + 9t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Parmi les droites suivantes, dont on donne une représentation, dire lesquelles sont perpendicuaires à $\mathcal{D}_1$:

$$\mathcal{D}_1 : 2x - 6y + 3 = 0, \quad \mathcal{D}_2 : -9x - 3y + 5 = 0, \quad \mathcal{D}_3 : 5x + \frac{3}{2}y + 6 = 0.$$

Application 40 - Régionnement du plan. On considère un point $A \in \mathcal{P}$ du plan et un vecteur $\vec{n}$ non nul. Représenter les trois régions suivantes du plan :

- L'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
- L'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} > 0$.
- L'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} < 0$.

Quel lien y a-t-il avec le travail d'une force ?

Application 41 - Lignes de niveau.

1. On considère un point $A \in \mathcal{P}$ du plan et un vecteur $\vec{u}$ non nul. Soit la fonction de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$. Donner les lignes de niveau de f, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan vérifiant $f(M) = cste$.
2. Même question avec la fonction $g : M \mapsto [\vec{u}, \overrightarrow{AM}]$.

4.2 Distance d'un point à une droite

Définition-Proposition 42 - Projection ortogonale sur une droite. Soit M un point du plan, $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$.
Ce point H est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche du point M, au sens euclidien. La distance HM est appelée la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$, on la note $d(M, \mathcal{D})$.

On a donc

$$d(M, \mathcal{D}) = \min_{A \in \mathcal{D}} \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$$

Cette quantité, géométriquement facile à identifier (si on se souvient de Pythagore), ne se calcule pas directement, ce qui est typique d'un problème d'optimisation. Par contre on peut facilement calculer la quantité $d(M, \mathcal{D})$ avec le résultat suivant :

Proposition 43 - Distance d'un point à une droite, version géométrique. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$ et de vecteur normal $\vec{n}$.
Pour un point M du plan, la distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Ces formules se simplifient si vous avez choisi des vecteurs « normés », c'est-à-dire de norme 1. Mais au fait, comment normer un vecteur ?

Proposition 44 - Distance d'un point à une droite, version cartésienne. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Pour un point $M = (x_0, y_0)$ du plan, la distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ces formules couvrent le cas où $M \in \mathcal{D}$ pour lequel $d(M, \mathcal{D}) = 0$.

✎ **En pratique** ✎ Comment déterminer le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$? On cherche d'abord un point $A \in \mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de norme 1. On a alors (clair sur un dessin) :

$$\overrightarrow{AH} = \overline{AH}\vec{u} = \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}\right)\vec{u}.$$

Remarquez qu'une autre méthode « cartésienne » consiste à déterminer l'équation de (HM), puisque $\vec{u}$ en est un vecteur directeur et qu'elle passe par M, puis à déterminer à la main $H = \mathcal{D} \cap (HM)$. Laissons cette méthode aux lycéens...

Exemple 45 - Exemple de projection à une droite. Déterminer la distance du point $M = (2, 3)$ à la droite passant par $A(5, 8)$ de vecteur directeur $\vec{u} = (-1, 4)$. Déteminer la projection orthogonale de M sur cette droite.

5 Cercles

On l'oublie souvent, mais un cercle possède un centre A et un rayon R : il s'agit de l'ensemble des points du plan M tels que la distance au centre AM vaut R. On rappelle, même si tout le monde le sait, que son aire vaut πR^2 et sa circonférence $2\pi R$.

Proposition 46 - Equation cartésienne d'un cercle. Le cercle de centre $A = (x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$ a pour équation cartésienne :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

On parle aussi d'équation normale, voire normalisée.

✎ **En pratique** ✎ Votre meilleur allié pour trouver une telle équation à partir d'une expression de degré 2 en x et y sera la mise sous forme canonique. Attention, toutes les équations de degré 2 ne conduisent pas à une équation de cercle ! Les autres *coniques* (ellipses et hyperboles, omniprésentes en astrophysique) ne sont pas au programme... de première année.

Remarque 47 - Lien avec les complexes. Pensez aussi à l'équation en complexes à l'aide des affixes : $|z - a| = R$, avec $a = x_0 + iy_0$ et $z = x + iy$.

Exemple 48 - Equation d'un cercle.

- Ecrire une équation cartésienne du cercle de centre $A = (1, 3)$ passant par le point $B = (4, 7)$. Donner les coordonnées de quatre points de ce cercle.
- Discuter en fonction du réel k la nature de l'ensemble des points de coodonnées (x, y) vérifiant

$$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 25 = k.$$

Exemple 49 - Paramétrisation d'un cercle. Donner un représentation paramétrique d'un cercle à l'aide de fonctions trigonométriques

Proposition 50 - Equation cartésienne d'un cercle. Etant donnés deux points A et B distincts, le cercle qui a pour diamètre le segment $[AB]$ est l'ensemble des points tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Voici une troisième manière de caractériser un cercle :

Exemple 51 - Cercle passant par trois points non alignés. Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Décrire le cercle qui passe par ces trois points. Comment nomme-t-on usuellement ce cercle, relativement au triangle ABC ?

Exemple 52 - Equation d'une tangente. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $A = (x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$. Déterminer l'équation de la tangente en un point $M = (x_1, y_1) \in \mathscr{C}$.

Nous voilà prêt à déterminer des intersection de cercles et de droites, voir le TD.