Chapitre 17 - Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

La notion de dimension nous est a priori intuitive. Nul n'ignore qu'une droite ou même une courbe est de dimension 1, qu'un plan ou même une surface est de dimension 2 et que nous vivons dans un espace à trois dimensions. Il n'est toutefois pas aisé de donner un sens rigoureux à ces idées courantes, ce qui est le l'objet de cette section – proposer une définition axiomatique de la dimension et en donner la théorie.

Définition 1 - Espace vectoriel de dimension finie. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit *de dimension finie* lorsqu'il possède une famille génératrice FINIE, et *de dimension infinie* dans le cas contraire

Exemple 2 Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ sont de dimension finie.
En effet, leurs bases canoniques respectives sont des familles génératrices finies. Pouvez-vous les citer ?

Exemple 3 Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
C'est aussi le cas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^I$, $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, avec I un intervalle non vide et non réduit à un point et $k \in \mathbb{N}$. Cela est plus dur à montrer et nous l'admettons à ce stade.

1.1 Existence de bases finies

L'*algorithme de la base incomplète* présenté ci-après est notre principal outil théorique pour établir l'existence de bases en dimension finie.

Théorème 4 - Théorème de la base extraite et existence de base finie.
Soit E un espace vectoriel non trivial de dimension finie. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base finie de E. En particulier, E possède une base finie.
De plus, on dispose d'un algorithme pour le faire (voir preuve).

Démonstration.
La démonstration, qui est un algorithme, est tout aussi importante que l'énoncé car elle donne un moyen concret d'obtenir une base lorsqu'on dispose d'une famille génératrice.

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille génératrice de E, on peut supposer qu'aucun des vecteurs n'est nul, sinon on les enlève sans rien changer au caractère générateur.

Alors l'espace E possède une base constituée de certains des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ et l'on dispose d'un algorithme pour déterminer de façon effective une telle base.

L'algorithme consiste à compléter peu à peu la famille LIBRE (x_1) à l'aide de certains vecteurs parmi $x_2,\dots,x_n$, en prenant soin de CONSERVER LA LIBERTÉ À CHAQUE AJOUT. Précisément,

- la variable $\mathscr{B}$ est initialisée à la valeur (x_1) – une famille LIBRE ;
- pour k décrivant $[\![2\,,n]\!]$: si la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k est libre, c'est-à-dire si x_k n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$, on remplace $\mathscr{B}$ par la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k.

Ayant pris soin de conserver la liberté de $\mathscr{B}$ à chaque étape de l'algorithme, la famille $\mathscr{B}$ finale est libre. Il ne reste donc plus qu'à établir que cette famille finale $\mathscr{B}$ engendre E. Or, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E, et tous les x_k sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $\mathscr{B}$, puisque ou bien ils sont dedans, ou bien n'y ont pas été ajoutés car combinaison linéaire des précédents éléments de $\mathcal{B}$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}((x_k)_{k=1,\dots,n}) = E$. ■

Exemple 5 La famille $((1, -5, 7), (2, 6, 8))$ est une base de $F = \text{Vect}\left((1, -5, 7), (2, 6, 8), (3, 1, 15), (1, 11, 1)\right)$.

Théorème 6 - Théorème de la base incomplète.
Soit E un espace vectoriel non trivial de dimension finie. Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base finie de E.

Lorsque E est trivial, *i.e.* $E = \{0_E\}$, aucune famille de vecteurs de E ne peut être libre et E ne saurait donc posséder de base. Dans tous les autres cas, la définition « posséder une famille génératrice finie » des espaces vectoriels de dimension finie équivaut ainsi à « posséder une base finie ».

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre finie de E. Il suffit d'ajouter à $\mathscr{L}$ les vecteurs d'une famille génératrice finie de E, puis d'appliquer l'algorithme de la base extraite. $\mathscr{L}$ est alors complétée en une base finie de E.

■

Remarque 7 - Et en dimension infinie ?. Le résultat précédent reste vraie en dimension infinie (tout comme la plupart des résultats liés aux bases), en retirant le mot « fini » des énoncés, mais on ne peut plus s'appuyer sur le nombre d'éléments d'une famille pour faire des preuves. Il faut aller puiser dans les axiomes liés à la théorie des ensembles, lesquels sont hors programme.

1.2 Dimension d'un espace vectoriel et rang d'une famille de vecteurs

On commence par un résultat important dans la construction, intuitif mais technique :

Théorème 8 - Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments, alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Démonstration. Soit X une partie génératrice de E à n éléments et Y une partie libre de E. Supposant par l'absurde que Y possède au moins $n+1$ éléments, nous allons prouver par récurrence, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } E \text{ est engendré par une famille de } n \text{ vecteurs dont les } n-k \text{ premiers sont dans } X \text{ et les } k \text{ suivants dans } Y \text{ ».}$$

L'idée est donc de construire une famille génératrice en remplaçant petit à petit les vecteurs de X par ceux de Y. On pourra alors conclure de la manière suivante. Pour $k = n$, E est engendré par une famille de n vecteurs de Y. En particulier, tout vecteur de Y est combinaison linéaire de ces n vecteurs et, Y possédant au moins $n+1$ éléments, Y est liée – contradiction.

- **Initialisation.** La famille des n vecteurs de X engendre E, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $k \in [\![0\,,n-1]\!]$.
  Faisons l'hypothèse que E est engendré par $(x_1, \ldots, x_{n-k}, y_1, \ldots, y_k)$ pour certains $x_1, \ldots, x_{n-k} \in X$ et $y_1, \ldots, y_k \in Y$, avec par convention aucun vecteur de Y pour $k = 0$.
  Puisque Y possède au moins $n+1$ éléments, il existe $y_{k+1} \in Y \setminus \{y_1, \ldots, y_k\}$ et, par hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$ tels que $y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i$. En outre, Y étant libre, les λ_i ne peuvent être tous nuls. Quitte à modifier l'ordre des x_i, on peut donc supposer $\lambda_{n-k} \neq 0$ et x_{n-k} est ainsi combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{n-k-1}, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}$. E est donc finalement engendré par $(x_1, \ldots, x_{n-k-1}, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1})$, soit $\mathscr{P}(k+1)$.

■

Il semble raisonnable de vouloir définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie comme le nombre de vecteurs de ses bases, *i.e.* le nombre de coordonnées nécessaires pour décrire les éléments de cet espace. Mais est-on assurés que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal ? Le théorème suivant répond positivement à cette question.

Définition-théorème 9 - Dimension. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si E est non trivial, toutes les bases de E sont finies de même cardinal. Ce cardinal unique est appelé la *dimension de* E et noté $\dim E$.
- Si E est trivial, *i.e.* $E = \{0_E\}$, on décrète par convention que E est de dimension 0.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une *droite (vectorielle)*, et si $\dim E = 2$, on dit que E est un *plan (vectoriel)*.

Démonstration. Supposons $E \neq \{0_E\}$. Comme E est de dimension finie, d'après le théorème 8, toutes les familles libres de E sont finies, donc en particulier ses bases aussi. En outre, E possède des bases (finies) d'après le théorème 6. Considérons ainsi $\mathscr{B}$ une base de E de cardinal n et $\mathscr{B}'$ une base de E de cardinal n'. Puisque $\mathscr{B}$ engendre E et $\mathscr{B}'$ est libre, toujours d'après le théorème 8, $n' \leqslant n$ et, par symétrie des rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, $n \leqslant n'$. Finalement $n = n'$. ■

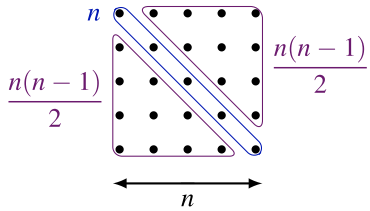
Notation 10 - Dimension selon le corps $\mathbb{K}$. En pratique, la dimension dépend du corps de base $\mathbb{K}$, en effet dans certain cas, l'espace vectoriel E peut être aussi bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, avec des propriétés différentes. On peut préciser cela en notant $\dim_{\mathbb{K}}(E)$, en en lisant « la dimension *sur* $\mathbb{K}$ », en cas d'ambiguïté.
L'exemple le plus frappant est celui de $\mathbb{C}$: il s'agit d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et aussi d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Montrer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ tandis que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Théorème 11 - Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \qquad \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 \qquad \text{et} \qquad \dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np.$$

Démonstration. Il suffit de dénombrer les vecteurs des bases canoniques de ces espaces vectoriels. ■

Exemple 12 Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sont là deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour lesquels $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.



Exemple 13 - Ensemble des solutions d'une équation différentielle ou d'une suite récurrente linéaire.
En utilisant votre connaissance explicite des solutions, montrer les points suivants :

- L'ensemble des solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.
- L'ensemble des solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constant d'ordre 2 est plan.
- L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre 2 est un plan.

Cet exemple resurgira sous la forme d'un théorème général (qui ne demande pas de connaître la forme explicite des solutions) ultérieurement.

Théorème 14 - Dimension vs cardinal d'une partie libre/génératrice. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. La proposition est triviale lorsque $n = 0$. Sinon, E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal n. Pour toute partie libre Y de E, sachant que $\mathscr{B}$ engendre E, on a déjà vu que Y possède au plus n éléments (cf. théorème 8). De même, pour toute partie génératrice X de E, sachant que $\mathscr{B}$ est libre, $\mathscr{B}$ possède au plus autant d'éléments que X, de sorte que X possède au moins n éléments. ■

Théorème 15 - Caractérisation des bases en dimension finie.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Pour une famille $\mathscr{B}$ de n vecteurs s'équivalent :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E ; **(ii)** $\mathscr{B}$ est une famille libre de E ; **(iii)** $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E.

✖ **Attention !** ✖ Ce théorème ne dit pas que « base = famille libre = famille génératrice » en dimension finie ! Il énonce seulement que cette coïncidence est vraie pour les familles qui ont EXACTEMENT AUTANT de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

Démonstration. Il suffit d'établir les implications **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** et **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)** dont les réciproques sont triviales. Si la famille $\mathscr{B}$ de n vecteurs de E est libre (resp. génératrice), on peut la compléter en une base de E d'après le théorème de la base incomplète (resp. en extraire une base de E d'après le théorème de la base extraite). Par définition de la dimension, le résultat en est dans les deux cas une famille de n vecteurs, autrement dit $\mathscr{B}$ elle-même, qui était donc une base initialement. ■

✎ **En pratique** ✎ Pour prouver qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel dont la dimension est connue, il suffit de vérifier que cette famille compte le bon nombre d'éléments et qu'elle est libre OU génératrice. C'est donc un théorème puissant qui divise par deux le travail à faire. Ce sera souvent à vous de choisir la moitié la plus facile !

Exemple 16 Montrer que la famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

Définition-théorème 17 - Rang d'une famille de vecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie) et $x_1,\dots,x_n \in E$.

On appelle *rang* de la famille $(x_1,\dots,x_n)$, noté $\text{rg}\,(x_1,\dots,x_n)$, la dimension (nécessairement finie) de $\text{Vect}\,(x_1,\dots,x_n)$. On a toujours $\text{rg}\,(x_1,\dots,x_n) \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre.

Le rang d'une famille finie de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendant qu'elle contient.

Démonstration. Engendré par un nombre fini de vecteurs, $\text{Vect}\,(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Or la dimension est toujours inférieure au nombre d'éléments de n'importe quelle partie génératrice (théorème 14), ainsi

$$\text{rg}\,(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \dim \text{Vect}\,(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \leqslant n.$$

Pour le cas d'égalité, nous venons de voir qu'en dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice (théorème 15). ■

Exemple 18 $\text{rg}\,((1,1,0),(0,0,1)) = 2$, $\text{rg}\,((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)) = 2$ et $\text{rg}\,(X, 2X, -X) = 1$.

✖ **Attention !** ✖ Nous voilà avec quatre objets mathématiques qui sont des entiers :

- La taille (d'une matrice).
- Le degré (d'un polynôme).
- La dimension (d'un espace vectoriel).
- Le rang (d'une famille de vecteurs).

Essayez de ne pas les confondre ! Ne dites pas « la dimension d'un polynôme » ou « le rang d'une droite ».

2 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 19 - Dimension d'un sous-espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

On a vu dans le chapitre sur les espace vectoriels que si on a deux sous-espaces vectoriels F et G, alors en concaténant des familles génératrices de F et G, on a une famille génératrice de $F + G$. Par contre, en concaténant deux bases de F et G, on obtient pas forcément une famille libre de $F + G$, (et donc pas forcément une base), car les vecteurs de $F \cap G$ peuvent être à la fois combinaisons linéaires des deux bases.

Voici un exemple frappant : dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $F = \text{Vect}((1,1,0))$ et $G = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$. Alors $F + G = G$, dont une base est $((1,0,0),(0,1,0))$. On voit bien que $\dim(F+G) \neq \dim(F) + \dim(G)$ sur cet exemple.

La formule de Grassmann ci-dessous mesure ce phénomène.

Théorème 20 - Formule de Grassmann. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. La somme $F + G$ est alors aussi de dimension finie et plus précisément :

$$\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)\,.$$

En particulier, $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Les cas $F \subset G$ et $G \subset F$ sont triviaux, on peut donc supposer $F \cap G \neq F$ et $F \cap G \neq G$.

Supposons en outre $F \cap G \neq \{0_E\}$ et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$ ($F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et est donc de dimension finie à l'instar de F). Celle-ci peut être complétée en une base $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ de F et en une base $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ de G (théorème de la base incomplète). Montrons alors que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de $F + G$, ce qui établira d'une part que $F + G$ est de dimension finie et d'autre part la formule de Grassmann, puisque

$$\dim(F + G) = p + q + r = (p + q) + (p + r) - p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

- Les familles $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, e_q)$ et $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ sont génératrices de F et G respectivement, ainsi la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots,$ est aisément une famille génératrice de $F + G$ (voir chapitre sur les espaces vectriels).
- Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q, \nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k = 0_E$.

  Alors $\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k}_{\in G} = \underbrace{-\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j}_{\in F}$ est un élément de $F \cap G$ et est donc combinaison linéaire des e_i, ce qui impose $\nu_1 = \ldots = \nu_r = 0$, par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$. Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0_E$ et on a donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$, par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$.

Le cas particulier $F \cap G = \{0_E\}$ se traite similairement. ∎

Théorème 21 - Existence de supplémentaires en dimension finie.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E et tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension, à savoir $\dim E - \dim F$.

Démonstration. À l'instar de E, F est de dimension finie.

- Si $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F dans E.
- Si $F = E$, alors $\{0_E\}$ est un supplémentaire de F dans E.
- Sinon, considérons $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F (F est de dimension finie à l'instar de E) que l'on peut compléter en une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, d'après le théorème de la base incomplète, et posons $G = \mathrm{Vect}(e_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors, par construction, $F \oplus G = E$ et G est donc un supplémentaire de F dans E.

Enfin si G est un supplémentaire de F dans E, alors $E = F \oplus G$ et donc $\dim G = \dim E - \dim F$. ∎

Exemple 22 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X + 1) = P(1 - X)\}$, alors $\mathrm{Vect}\left(X, X^3\right)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.
En effet,

- Commençons par nous donner une base de F. Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -a \\ 3a + b &=& 3a + b \\ 3a + 2b + c &=& -3a - 2b - c \\ a + b + c + d &=& a + b + c + d \end{array} \right. \qquad \text{(par identification des coefficients)} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = 0 \;\text{ et }\; c = -2b. \end{aligned}$$

  Ainsi
$$F = \left\{bX^2 - 2bX + d \;\middle|\; b, d \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\left(X^2 - 2X\right) + d \;\middle|\; b, d \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(1, X^2 - 2X\right)$$
  la famille $\left(1, X^2 - 2X\right)$ engendre donc F, or elle est libre (vecteurs non colinéaires) et est donc une base de F.
- Complétons alors cette famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec certains vecteurs de la base canonique. De degrés échelonnés, la famille $\left(1, X^2 - 2X, X, X^3\right)$ est libre et de cardinal 4 égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$. Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(X, X^3)$ est UN supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème 23 - Caractérisation des supplémentaires en dimension finie. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \bigoplus G$;

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$, i.e. la somme $F + G$ est directe, et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. ;

(iii) $F + G = E$, et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

✎ **En pratique** ✎ C'est souvent l'implication « $(ii) \implies (iii)$ et (i) » qui est utilisée en pratique.

Démonstration.

- (i) ou $(ii) \implies (iii)$ D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim E$, or $F + G \subset E$, donc $F + G = E$.
- (i) ou $(iii) \implies (ii)$ D'après la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = 0$, soit $F \cap G = \{0_E\}$.
- (ii) ou $(iii) \implies (i)$ Clair d'après la formule de Grassmann.

■

Exemple 24 Les espaces vectoriels $F = \text{Vect}\left((0,1,0)\right)$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

En effet, d'une part, $\dim F = 1$, puisque $\left((0,1,0)\right)$ est clairement une base de F, et $\dim G = 2$, puisque

$$G = \{(-2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((-2,1,0), (-3,0,1)\right)$$

et $\left((-2,1,0),(-3,0,1)\right)$ est une base de G (vecteurs non colinéaires). D'autre part, on a $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. En effet, si $u \in F \cap G$, il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (0, a, 0)$, mais on a alors aussi $0 + 2a + 3 \times 0 = 0$ ce qui implique $a = 0$, soit $u = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exemple 25 L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, en voici une nouvelle preuve à base de dimensions ! Sachant que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, alors $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En outre, soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$, donc $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$.

Exemple 26 Soit F et G deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$. Montrer que F et G ne sont pas en somme directe, mais que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

3 Fiche essentiel

Théorème - Bases et dimension.

- ♥♥♥ Une base de E est une famille LIBRE ET GÉNÉRATRICE DE E
- ♥ Une base peut être construite (et cela prouve l'existence d'une base) avec L'ALGORITHME DE LA BASE INCOMPLÈTE : on part d'une famille génératrice, dont les premiers vecteurs sont libres, et on écrème de manière à garder la liberté. En pratique, on retire les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des précédents.
- ♥♥♥ Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier est appelé la dimension de E, notée $\dim(E)$. Ainsi : LA DIMENSION C'EST LE CARDINAL D'UNE BASE.
- Le programme de PTSI se concentre sur les espaces vectoriels de DIMENSION FINIE.

Théorème - Dimension et bases canoniques pour les ensembles de références.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

- ♥♥Toute famille libre a n éléments, ou moins.
- ♥♥ Toute famille génératrice a n éléments, ou plus.
- ♥♥♥ Théorème de la dimension (ou du moindre effort car il divise le travail par 2) : si je sais que $\dim(E) = n$, et que j'ai une famille de n vecteurs, alors elle est libre si et seulement si elle est génératrice, et c'est alors une base de E.

Théorème - Dimension et bases canoniques pour les ensembles de références ♥♥♥.
Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, il faut être capable d'en donner la dimension. Ils possèdent une base de référence, appelée BASE CANONIQUE :

- L'ensemble des n-uplets $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. Sa base canonique est $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$, avec e_i le vecteur composé d'un 1 en i-ème position, et de 0 partout ailleurs.
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$, des polynômes de degré inférieur ou égal à n est de dimension $n+1$. Sa base canonique est $(1, X, \ldots, X^n)$. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 est de dimension 3. Logique, il faut trois coefficients !
- L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes est de dimension $n \times p$. Ainsi, l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n est de dimension n^2. Sa base canonique est (E_{ij}), où la matrice élémentaire E_{ij} est composée d'un 1 en position (i, j), et de 0 partout ailleurs.

Théorème - Dimension et sev .

- ♥♥ Si F est sous-espace vectoriel de E, alors $0 \leqslant \dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.
- ♥♥ Le rang d'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$, c'est la dimension du sous-espace vectoriel engendré : $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n))$. Cela vaut n si et seulement si la famille est libre. Ainsi, ne pas dire trop vite que $\dim(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)) = n$, il faut parler de liberté !

Théorème - Dimension et supplémentaire .

- ♥♥ Soit F un sous-espace vectoriel de E, on rappelle que G est un supplémentaire de F dans E lorsque
  - ⋆ $E = F + G$, c'est-à-dire que tout élément de E est combinaison linéaire d'un élément de F et d'un élément de G.
  - ⋆ La somme $F + G$ est directe, c'est-à-dire que la combinaison linéaire ci-dessus est unique.

  On note alors $E = F \bigoplus G$.
- ♥♥ La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Pratique car $F \cap G$ est souvent facile à déterminer.
- ♥♥ On a la formule de Grassman : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- ♥♥♥ Théorème de la dimension (encore un théorème du moindre effort car il divise le travail par 2) : si je sais déjà que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$, alors pour montrer que $E = F \bigoplus G$, il SUFFIT de montrer que $E = F + G$ OU $F \cap G = \{0\}$ (la somme est directe), au lieu d'avoir les deux à montrer.