Chapitre 18 - Dénombrement

L'objectif de ce chapitre est purement pratique : APPRENDRE À COMPTER.

Dénombrer un ensemble d'objets consiste à déterminer le cardinal de cet ensemble. Le dénombrement se base souvent sur la combinatoire, qui est l'étude des configurations possibles d'un ensemble d'objets.

La clé du dénombrement combinatoire est la notion de bijection : si je peux construire une correspondance exacte entre les objets d'un ensemble E et les objets d'un ensemble F (c'est-à-dire une bijection de E dans F), alors E a autant d'objets que F.

Par la suite, il est souvent un peu maladroit de revenir systématiquement à la définition, en comparant à un ensemble $[\![1\,,n]\!]$, et on recherche plutôt la mise en bijection avec des ensembles de référence bien connus. Notre objectif est de dénombrer des ensembles finis de manière concrête, et nous ne passerons pas toujours pas la notion de bijection, mais il faudra être précis dans le vocabulaire afin de rester rigoureux.

1 Cardinal d'un ensemble fini, combinatoire des ensembles

1.1 Définition du cardinal

La définition suivante formalise la notion intuitive de nombre d'éléments d'un ensemble fini.

Définition-théorème 1 - Ensemble fini/infini, cardinal d'un ensemble fini. Soit E un ensemble.

- L'ensemble E est dit *fini* s'il est vide ou si, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection de l'ensemble $[\![1\,,n]\!]$ sur E. Dans le cas contraire, E est dit *infini*.
- Si E est fini non vide, l'entier n de la définition précédente est unique, appelé le *cardinal de E* ou *nombre d'éléments de E* et noté $|E|$ (ou $\mathrm{Card}(E)$). Par convention, l'ensemble vide est de cardinal 0.

Démonstration. Il suffit d'établir par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{« Pour tout } m \in \mathbb{N}^*, \text{ si } [\![1\,,n]\!] \text{ et } [\![1\,,m]\!] \text{ sont en bijection alors } m = n \text{ ».}$$

- **Initialisation.** $\mathscr{P}(1)$ est claire.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  Considérons $m \in \mathbb{N}^*$ et supposons que f réalise une bijection de $[\![1\,,n+1]\!]$ sur $[\![1\,,m]\!]$. Puisque $n+1 \geqslant 2$, $m = 1$ est exclu. En outre f induit une bijection de $[\![1\,,n]\!]$ sur $[\![1\,,m]\!] \setminus \{f(n+1)\}$ lui-même en bijection avec $[\![1\,,m-1]\!]$ (il suffit de décaler les entiers compris entre $f(n+1)+1$ et m). Alors, par hypothèse de récurrence, $n = m-1$, soit $n+1 = m$.
  Finalement $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par principe de récurrence.

■

Exemple 2 Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, avec $m \leqslant n$, l'ensemble $[\![m\,,n]\!]$ est fini de cardinal $n-m+1$.
En effet, la fonction $k \longmapsto k+m-1$ est bijective de $[\![1\,,n-m+1]\!]$ sur $[\![m\,,n]\!]$ de réciproque $k \longmapsto k-m+1$.

Proposition 3 - Ensemble en bijection et cardinal. Soit E et F deux ensembles.
Si E est fini et s'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration. Si E est vide, F l'est nécessairement aussi. Dans le cas où E est non vide, nous pouvons nous donner une bijection f de $[\![1\,,|E|]\!]$ sur E et une bijection g de E sur F. L'application $g \circ f$ est alors bijective de $[\![1\,,|E|]\!]$ sur F, ainsi d'une part F est fini et d'autre part $|F| = |E|$, par unicité du cardinal. ■

Théorème 4 - Partie d'un ensemble fini. Soit E un ensemble fini et A une partie de E.
Alors A est finie et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$

Démonstration. Le théorème est clair si E est vide. Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $E = [\![1\,,n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et on procède à nouveau par récurrence sur n.

- **Initialisation.** $\mathscr{P}(1)$ est claire.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  Soit A une partie stricte de $[\![1\,,n+1]\!]$. Il existe donc un entier $a \in [\![1\,,n+1]\!]$ tel que $A \subset [\![1\,,n+1]\!] \setminus \{a\}$. Considérons alors la bijection f de $[\![1\,,n+1]\!]$ sur lui-même définie par

  $$\forall x \in [\![1\,,n+1]\!]\,, \quad f(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = n+1 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

  L'image de A par f est ainsi une partie de $[\![1\,,n]\!]$, par conséquent, par hypothèse de récurrence, $f(A)$ est un ensemble fini et $|f(A)| \leqslant n$. Il en va donc de même de A, puisque f induit une bijection de A sur $f(A)$.
  Finalement $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par principe de récurrence.

■

Lorsqu'on a égalité dans les cardinaux dans le théorème précédent, l'inclusion devient une égalité :

Théorème 5 - Partie d'un ensemble fini. Soient A et E deux ensembles finis. Alors on a

$$A = E \iff \begin{cases} A \subset E \\ \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) \end{cases}.$$

✎ **En pratique** ✎ Ainsi, pour établir que deux ensembles FINIS sont égaux, au lieu de montrer la double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$, on peut se contenter de montrer, grâce au résultat précédent, l'inclusion $A \subset B$ et l'égalité d'entiers $|A| = |B|$.

1.2 Cardinaux *vs* injection/surjection

Théorème 6 - Effet d'une application sur le cardinal. Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

(i) Si f est injective et si F est fini, alors E aussi est fini et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$,

(ii) Si f est surjective et si E est fini, alors F aussi est fini et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$,

(iii) Si E et F sont FINIS DE MÊME CARDINAL, alors

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

En effet,

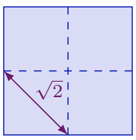
- Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de E sont envoyés par f sur deux points distincts de F, *i.e.* que $f(E)$ est comme une copie de E dans F. Une telle copie n'est possible que si F est « plus gros » que E, *i.e.* si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ – assertion **(i)**.
- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f, E couvre F en totalité. Une telle couverture n'est possible que si E est « plus gros » que F, *i.e.* si $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ – assertion **(ii)**.

Théorème 7 - Principe des tiroirs. Si $n+1$ chaussettes doivent être rangées dans n tiroirs, alors deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

En effet, ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs revient à se donner une application d'un ensemble de cardinal $n+1$ (l'ensemble des chaussettes) dans un ensemble de cardinal n (l'ensemble des tiroirs). Or, puisque $n+1 > n$, une telle application ne saurait être injective.

Plus formellement, le principe des tiroirs énonce que si E et F sont deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$, alors il n'existe pas d'injection de E dans F.

Exemple 8 Étant donné 5 points dans un carré d'arête 2, on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.



En effet, coupons simplement notre carré en quatre comme indiqué ci-contre. Un des quatre carrés ainsi formés contient nécessairement deux des cinq points. Or ces quatre carrés ont des diagonales de longueur $\sqrt{2}$.

1.3 Règles de calcul sur les cardinaux

Par la suite, pour indiquer qu'une union est disjointe, on utilisera le symbole « $\sqcup$ » en lieu et place de « $\cup$ ».

Théorème 9 - Cardinal d'une union, d'une différence, d'un complémentaire, d'un produit cartésien. Soit A, B, $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis.

- **Union.** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. En particulier, si A et B sont disjoints : $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.

  Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints : $\left| \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

- **Différence.** $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$.

  Complémentaire. En particulier, si $B \subset A$: $\left|\overline{B}\right| = |A \backslash B| = |A| - |B|$.

- **Produit cartésien.** $|A \times B| = |A| \times |B|$. Plus généralement, $|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.

En effet, pour calculer $|A \cup B|$, on additionne $|A|$ et $|B|$ pour tenir compte des éléments de A et de ceux de B, mais de ce fait on compte deux fois les éléments de l'intersection $A \cap B$, ce qui nécessite de retrancher $|A \cap B|$.

Démonstration.

- **Union disjointe.** Soit A et B disjoints avec $m = |A|$ et $n = |B|$. Il existe, par définition, deux bijections $f : [\![1\,,m]\!] \longrightarrow A$ et $g : [\![1\,,n]\!] \longrightarrow B$. En outre, on peut considérer une bijection $h : [\![1\,,n]\!] \longrightarrow [\![m+1\,,m+n]\!]$ (cf. exemple 2). On obtient alors une bijection φ de $[\![1\,,m+n]\!]$ sur $A \sqcup B$ via
$$\varphi : x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant m \\ g(h^{-1}(x)) & \text{si } x > m. \end{cases}$$
La formule plus générale pour $\left|\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right|$ s'en déduit bien sûr par récurrence.
- **Différence.** D'une part, $A \cap B$ et $A \backslash B$ sont finis en tant que sous-ensemble de l'ensemble fini A. D'autre part, $A = (A\backslash B) \sqcup (A \cap B)$ et on conclut d'après le point précédent.
- **Union quelconque.** Il suffit de remarquer que
$$A \cup B = (A\backslash B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B\backslash A)$$
les deux points précédents permettant de conclure.
- **Produit cartésien.** Pour tout $a \in A$, $b \longmapsto (a,b)$ est clairement une bijection de B sur $\{a\} \times B$, ainsi $|\{a\} \times B| = |B|$. Or
$$A \times B = \bigsqcup_{a \in A} \{a\} \times B$$
et ainsi, d'après le premier point,
$$|A \times B| = \left|\bigsqcup_{a\in A} \{a\} \times B\right| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = \sum_{a\in A} |B| = |A| \times |B|\,.$$
La formule plus générale pour $|A_1 \times \cdots \times A_n|$ s'obtient à nouveau par récurrence.

Une démonstration rigoureuse passe par des bijections, mais on peut se contenter d'une vision intuitive, comme celle ci-dessus.

■

Remarque 10 - Formule du crible pour une union d'un nombre finie. Il n'y a pas de formule aussi simple pour le cardinal de l'union de plus de deux ensembles. Il existe bien une formule donnant le cardinal d'une union quelconque (formule du crible) mais elle est technique, et n'est pas au programme, alors ne cherchez pas à l'inventer. Si on vous demande le cardinal d'une union quelconque d'ensembles, commencez par regarder si les ensembles ne seraient pas disjoints.

Le résultat suivant est évident mais rend rigoureux de nombreux raisonnements combinatoires :

Théorème 11 - Lemme du berger ou Principe multiplicatif.
Toute réunion disjointe de n ensembles de cardinal p forme un ensemble de cardinal np

Le nom de ce principe vient de la question suivante : dans un troupeau de n moutons, combien y a-t-il de pattes ? (Tous les moutons ont le bon nombre de pattes et il n'y a pas de siamois).

Voici un énoncé plus formel du lemme des berger : si $f : E \longrightarrow F$ est surjective et s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $y \in F$, $\left|f^{-1}(\{y\})\right| = k$ (tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents par f), alors $|E| = k\,|F|$.

Dans les exemples suivants, voyez-vous où se trouve la réunion disjointe à laquelle on applique le lemme des bergers ?

Exemple 12 Il y a $n(n-1)$ couples (x,y) dans $[\![1\,,n]\!]^2$ tels que $x \neq y$.

En effet, construire un tel couple revient par exemple à commencer par choisir x, puis à choisir y. Il y a alors n valeurs possibles pour x et, pour chacune de ces n valeurs, $n-1$ valeurs restantes pour y, soit en tout $n(n-1)$ couples possibles.
Formellement, on peut étudier la surjection suivante :
$$f : [\![1\,,n]\!]^2 \setminus \{(i,i) \mid i \in [\![1\,,n]\!]\} \longrightarrow [\![1\,,n]\!]\,,\ \text{définie par}\ \ (x,y) \longmapsto x.$$

Exemple 13 À partir d'un alphabet de p lettres, on peut former $p(p-1)^{n-1}$ mots de n lettres qui ne contiennent jamais deux lettres consécutives identiques.

En effet, pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet (p possibilités), mais pour chacune des suivantes, on n'a plus que $p-1$ choix possibles pour éviter que deux lettres consécutives soient identiques.

Exemple 14 Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ que l'on tire toutes successivement sans remise. Il y a $2\,n!^2$ tirages pour lesquels un numéro pair est toujours suivie d'un numéro impair et réciproquement.

En effet, les tirages à dénombrer sont de deux types disjoints : ceux qui commencent par un numéro pair et ceux qui commencent par un numéro impair. Pour un tirage commençant par un numéro pair, on tire une boule paire (n possibilités), puis une boule impaire (n possibilités), puis une boule paire ($n-1$ possibilités), puis une boule impaire ($n-1$ possibilités), etc. – soit un total de $n^2(n-1)^2\dots 2^2 1^2 = n!^2$ tirages. De la même façon, on en dénombre autant à commencer par un numéro impair.

Exemple 15 Il y a 4×26^3 $(=70\,304)$ mots de 7 lettres contenant le mot « OUPS ».

En effet, lorsque le mot « OUPS » apparait dans un mot de 7 lettres, il n'y apparait qu'une fois. Pour construire un tel mot, on peut donc :

- d'abord choisir la position du sous-mot « OUPS », soit 4 possibilités pour le « O » initial qui ne peut occuper que les positions 1, 2, 3 et 4 ;
- puis choisir arbitrairement les trois lettres restantes, (nous allons parler de 3-liste de l'alphabet), soit 26^3 possibilités.

Théorème 16 - Nombre d'applications entre deux ensembles finis. $\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\,F)^{\mathrm{Card}\,E}$, où l'on rappelle que F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F.

Exemple 17 - Nombre d'applications entre deux ensembles finis. Lister les applications de $\{1,2\}$ dans $\{1,2,3\}$ et vérifier la formule ci dessus. Enumérer les applications injectives.

Théorème 18 - Nombre de parties d'un ensemble fini. On rappelle que $\mathscr{P}(E)$ désigne l'ensemble des sous-ensemble de E. Alors on a $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

Exemple 19
$$\mathscr{P}(\underbrace{\{0,1,2\}}_{\text{3 éléments}}) = \left\{ \underbrace{\varnothing}_{\substack{\binom{3}{0}=1 \text{ partie} \\ \text{à 0 élément}}},\ \underbrace{\{0\},\{1\},\{2\}}_{\substack{\binom{3}{1}=3 \text{ parties} \\ \text{à 1 élément}}},\ \underbrace{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}}_{\substack{\binom{3}{2}=3 \text{ parties} \\ \text{à 2 éléments}}},\ \underbrace{\{0,1,2\}}_{\substack{\binom{3}{3}=1 \text{ partie} \\ \text{à 3 éléments}}} \right\}$$
et on bien $|\mathscr{P}(\{0,1,2\})| = 8 = 2^3 = 2^{|\{0,1,2\}|}$.

2 Combinatoire des ensembles d'applications

Dans l'ensemble de cette section, E et F désignent deux ensembles finis.

2.1 Applications quelconques, p-listes

Définition-théorème 20 - p-liste. Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

- On appelle *p-liste d'éléments de F* tout p-uplet d'éléments de F, *i.e.* tout élément de F^p.
- Le nombre de p-listes d'éléments de F est $(\mathrm{Card}\,F)^p$.

Démonstration. Une p-liste est la donnée d'un élément de $F^p = F \times \ldots \times F$. Le nombre de p-listes d'éléments de F est donc $\operatorname{Card} F^p = (\operatorname{Card} F)^p$. ∎

Remarque 21

- Une 2-listes est appelée un couple, et une 3-liste un triplet.
- Dans une liste, l'ordre des éléments compte - une p-liste étant un p-uplet et non un ensemble – et un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.
- Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages SUCCESSIFS AVEC REMISE - les tirages sont successifs, puisque l'ordre des éléments d'une p-liste compte, et avec remise, puisque les répétitions sont autorisées.

Exemple 22 Soit $F = \{a, b, c\}$. Ecrire tous les mots possibles utilisant deux lettres de F, c'est-à-dire toutes les 2-listes (couples) de F.

Exemple 23 Il y a 52^5 (= 380 204 032) façons de tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes.

Observons que la donnée d'une p-liste d'éléments de F, *i.e.* d'un p-uplet $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de F, revient à se donner une application de $[\![1\,,p]\!]$ dans F (définie par $i \longmapsto x_i$) et que, réciproquement, la donnée d'une application de $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$ dans F est équivalente à la donnée de la p-liste $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ de F. Ainsi, dénombrer les p-listes de F revient à dénombrer les applications de $[\![1\,,p]\!]$ dans F.

2.2 Injections, p-listes d'éléments distincts

Définition-théorème 24 - Arrangement. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = \operatorname{Card} F$.

- On appelle *p-liste distincte de F* (ou *p-arrangement de F*) toute p-liste d'éléments DISTINCTS de F.
- Il existe $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes distinctes de F si $p \leqslant n$, et il n'en existe pas si $p > n$.

Démonstration. Construire une p-liste distincte de F, avec $p \leqslant n$, revient à choisir un premier élément dans F (n possibilités), puis un deuxième élément distinct du premier ($n-1$ possibilités), ... et enfin un p^{e} élément distinct des précédents ($n-p+1$ possibilités) ; d'où un total de $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes distinctes de F. ∎

Remarque 25 Les p-liste distinctes sont utilisées pour modéliser des tirages SUCCESSIFS SANS REMISE - sans remise puisque les répétitions sont exclues.

Exemple 26 Il y a $\dfrac{52!}{47!}$ (= 311 875 200) façons de tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes.

On peut à nouveau faire le lien avec le dénombrement des applications ; les arrangements étant aux listes ce que les injections sont aux applications.

Théorème 27 - Nombres d'injections et de permutations. On pose $p = |E|$ et $n = |F|$. L'ensemble des applications injectives de E dans F est vide si $p > n$ et de cardinal $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$.

Démonstration. ... ∎

2.3 Permutations

Définition-théorème 28 Soit F un ensemble de cardinal fini n. On appelle permutation de F toute bijection de F dans F. Une bijection peut être assimilée à une n-liste de F, et il y a donc $n!$ permutations de F.

Exemple 29 Dans la finale du 100m, 8 coureurs sont alignés. Combien de classements possibles y a-t-il ?

Exemple 30 De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?

- **Banc rectiligne.** En numérotant les personnes à asseoir de 1 à n, les asseoir sur un banc rectiligne revient alors à se donner un n-arrangement de $[\![1\,,n]\!]$, soit un total de $n!$ configurations.
- **Table ronde.** La différence entre un banc rectiligne et une table ronde réside notamment en l'absence d'une première place autour de cette dernière – par exemple, on ne change pas la configuration des places assises si l'on demande à chaque convive de se déplacer d'une place sur sa droite. Pour asseoir n personnes autour d'une table ronde :
  - ⋆ on peut donc commencer par asseoir arbitrairement la personne numérotée n ;
  - ⋆ puis lui donner des voisins de proche en proche par la droite en se donnant une $(n-1)$-liste quelconque de $[\![1\,,n-1]\!]$, soit $(n-1)!$ possibilités ;

  et finalement un total de $(n-1)!$ configurations possibles.

Exemple 31 Soit $n \geqslant 3$. Il y a $(n-2)!$ permutations de $[\![1\,,n]\!]$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3.

En effet, construire une telle permutation revient à choisir l'image de 3 ($n-2$ possibilités), puis celle de 4 ($n-3$ possibilités),... et enfin celle de n (1 possibilité) ; d'où un total de $(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 1 = (n-2)!$ possibilités.

3 Sous-ensembles et coefficients binomiaux

Définition-théorème 32 - Combinaison. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- On appelle *p-combinaison de E* (ou *combinaison à p éléments de E*, ou *parties à p éléments de E*) toute partie de E de cardinal p.
- Si E est fini de cardinal n, alors le nombre de p-combinaisons de E est $\binom{n}{p}$.

Démonstration. Notons, pour $p \leqslant n$, C_n^p le nombre de p-combinaisons de E. On souhaite établir que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, c'est-à-dire que $\dfrac{n!}{(n-p)!} = p! \times C_n^p$ et on reconnait à gauche de cette égalité le nombre de p-arrangements de E. Or choisir un p-arrangements de E revient à :

- choisir p éléments dans E, *i.e.* une p-combinaison, soit C_n^p possibilités ;
- puis à ordonner ces p éléments, *i.e.* choisir un premier élément (p possibilités), puis un deuxième ($p-1$ possibilités), ... et enfin un p^{e} (1 possibilité), soit au total $p!$ choix (en pratique, on a construit une permutation des p éléments !) ;

soit finalement un total de $p! \times C_n^p$ p-arrangements de E. ∎

Exemple 33 Les 2-combinaisons de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ sont ces $\binom{4}{2} = 6$ sous-ensembles à deux éléments :

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\} \text{ et } \{3,4\}.$$

Remarque 34

- Ne confondez pas une combinaison, qui est un ENSEMBLE, et un p-uplet. Dans une combinaison, les éléments sont donnés sans ordre, mais ne peuvent pas se répeter.
- Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages SIMULTANÉS, l'ordre des éléments n'ayant pas d'importance.

Exemple 35 De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

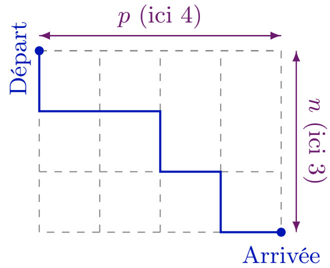
Dénombrer le nombre de tirages possibles de 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes revient à calculer le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble à 52 éléments, soit $\binom{52}{5} = \dfrac{52!}{47! \times 5!} = \dfrac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!} = 2\,598\,960$.

Exemple 36 - p-listes strictement croissantes de $[\![1\,,n]\!]$.

Pour tout $p \in [\![1\,,n]\!]$, il existe $\binom{n}{p}$ p-listes d'entiers $(i_1, \ldots, i_p)$ telles que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$.

En effet, Choisir une famille $(i_1, \ldots, i_p)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ revient à choisir une p-combinaison de $[\![1\,,n]\!]$ ($\binom{n}{p}$ possibilités), puisqu'il n'y a ensuite qu'une seule manière d'en ranger les éléments dans l'ordre croissant.

Exemple 37 Un pion se promène le long d'un grillage plan de taille $n \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-il emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?



Un chemin de longueur minimale est ici entièrement déterminé par la donnée de n déplacements élémentaires vers le bas et p vers la droite. Tout chemin peut donc être identifié avec un mot quelconque de $n+p$ lettres dont n « B » (bas) et p « D » (droite). Or il existe autant de tels mots que de façons d'y placer les « D », soit $\binom{n+p}{p}$.

Exemple 38 On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres avec multiplicité mais dans un ordre quelconque. Le mot « MSCOIONIBNA » est une anagramme du mot « COMBINAISON ». Combien d'anagrammes le mot « INITIATIVE » possède-t-il ?

En effet, on souhaite dénombrer les mots de 10 lettres formés à partir de 4 « I », 2 « T », 1 « N », 1 « A », 1 « V » et 1 « E ». Pour construire de façon quelconque un tel mot, on peut choisir :

- d'abord la position des « I », soit $\binom{10}{4} = 210$ possibilités ;
- puis la position des « T », soit $\binom{10-4}{2} = 15$ possibilités ;
- puis la position du « N », soit $\binom{4}{1} = 4$ possibilités ;
- puis la position du « A », soit $\binom{3}{1} = 3$ possibilités ;
- puis la position du « V », soit $\binom{2}{1} = 2$ possibilités ;
- et enfin la position du « E », soit $\binom{1}{1} = 1$ possibilité ;

d'où un total de $210 \times 15 \times 4 \times 3 \times 2 = 75\,600$ anagrammes possibles.

On aurait évidemment pu choisir la position des lettres dans un ordre différent - par exemple, le « A », puis les « T », puis le « V », le « E », le « N » et enfin les « I », ce qui mène naturellement au même résultat, mais obtenu différemment :

$$\binom{10}{1} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{4} = 10 \times 36 \times 7 \times 6 \times 5 \times 1 = 75\,600.$$

Exemple 39 Soit $n \geqslant 2$. Le nombre de surjections de $[\![1\,,n]\!]$ sur $[\![1\,,n-1]\!]$ est $(n-1)!\dbinom{n}{2}$.

En effet, se donner une surjection de $[\![1\,,n]\!]$ sur $[\![1\,,n-1]\!]$ revient à

- commencer par se donner une paire d'éléments $\{x, y\}$ de $[\![1\,,n]\!]$ (ceux qui auront la même image), soit $\dbinom{n}{2}$ possibilités ;
- puis à se donner une bijection de $[\![1\,,n]\!] \setminus \{x\}$ sur $[\![1\,,n-1]\!]$ (ensemble de même cardinaux), soit $(n-1)!$ possibilités.

Exemple 40 - Nombre de parties d'un ensemble fini. Retrouver la formule $\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}$.

En effet, Pour dénombrer les parties d'un ensemble fini à $n = |E|$ éléments, il suffit d'en dénombrer les parties à k éléments, pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Précisément, si $\mathscr{P}_k(E)$ est l'ensemble des k-combinaisons de E, alors $\mathscr{P}(E)$ est la réunion DISJOINTE des ensembles $\mathscr{P}_0(E)$, ..., $\mathscr{P}_n(E)$ et ainsi $|\mathscr{P}(E)| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |\mathscr{P}_k(E)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = 2^{|E|}$.

3.1 Démonstrations combinatoires

Pour établir certaines égalités on peut parfois procéder par *double comptage*, c'est-à-dire énumérer un ensemble de deux manières différentes. Les exemples qui suivent illustrent cette démarche dans trois situations bien connues.

Exemple 41 - Formule du binome de Newton. Etant donnés deux nombres a et b (voire deux matrices qui commutent !), on rappelle que la formule du binôme sert à calculer

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times \ldots \times (a+b)}_{n \text{ facteurs}}.$$

Si on développe ce produit, chaque parenthèse contribue par un facteur a ou b à un terme. Pour chaque entier $p \in [\![0\,,n]\!]$ (le nombre de contribution du facteur a), on a donc des termes de la forme $a^p b^{n-p}$, et le nombre de termes de cette forme est le nombre de p-combinaisons parmi les n facteurs $(a+b)$, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$ termes de la forme $a^p b^{n-p}$. En ajoutant le tout on retrouve

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Exemple 42 - Formule de Pascal. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p-1} + \dbinom{n}{p} = \dbinom{n+1}{p}$.

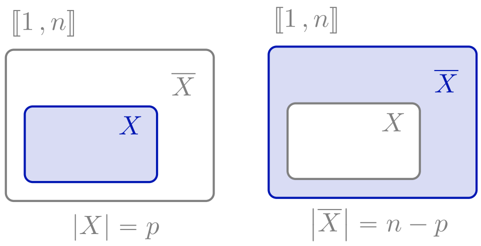
À nouveau, on souhaite établir cette égalité sans calcul par un raisonnement purement combinatoire. Il suffit alors ici de distinguer deux types de p-combinaisons de $[\![1\,, n+1]\!]$ – celles qui contiennent l'élément $n+1$ et celles qui ne le contiennent pas :

- Les p-combinaisons de $[\![1\,, n+1]\!]$ qui contiennent $n+1$ sont moralement des $(p-1)$-combinaisons quelconques de $[\![1\,, n]\!]$ auxquelles on ajoute $n+1$ et il y en a $\dbinom{n}{p-1}$.
- Les p-combinaisons de $[\![1\,, n+1]\!]$ qui ne contiennent pas $n+1$ sont exactement les p-combinaisons de $[\![1\,, n]\!]$ et il y en a $\dbinom{n}{p}$.

Formellement, on a partitionné l'ensemble $\mathscr{P}_p\left([\![1\,, n+1]\!]\right)$ en deux sous-ensembles (disjoints donc) de p-combinaisons particulières.

Exemple 43 - Formule de Symétrie. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

On souhaite établir cette égalité sans calcul par un raisonnement purement combinatoire. Pour cela il suffit simplement d'observer que se donner une p-combinaison X de $[\![1\,, n]\!]$ ($\binom{n}{p}$ possibilités) revient à se donner son complémentaire $\overline{X}$ (puisque $X = \overline{\overline{X}}$) qui est une $(n-p)$-combinaison de $[\![1\,, n]\!]$ ($\binom{n}{n-p}$ possibilités).



Formellement, on exprime le fait que l'application $X \longrightarrow \overline{X}$ est une bijection de l'ensemble $\mathscr{P}_p([\![1\,, n]\!])$ des p-combinaisons de $[\![1\,, n]\!]$ sur l'ensemble $\mathscr{P}_{n-p}([\![1\,, n]\!])$ des $(n-p)$-combinaisons de $[\![1\,, n]\!]$. En effet, cette application est sa « propre » réciproque, à l'échange près des ensembles de départ et d'arrivée. Ainsi, comme voulu,

$$|\mathscr{P}_p([\![1\,, n]\!])| = |\mathscr{P}_{n-p}([\![1\,, n]\!])|\,.$$

Exemple 44 - Formule Comité-Président. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.

À nouveau, on souhaite établir cette égalité sans calcul par un raisonnement purement combinatoire. L'idée est de dénombrer le nombre de manière de former un gouvernement (ou comité) de p personnes, dont un président, parmi un peuple de n personnes :

- Ou bien le peuple choisit p personnes pour former le comité (donc une p-combinaison de $[\![1\,, n]\!]$), qui ensuite choisit le président (p choix), ce qui donne $p \times \binom{n}{p}$ manières de former le tout.
- Ou bien le peuple choisit son président (n choix), qui va ensuite former son comité (donc une $p-1$-combinaison de $[\![1\,, n-1]\!]$) ce qui donne $n \times \binom{n-1}{p-1}$ manière de former le tout.

4 Bilan pratique

Les questions de dénombrement peuvent s'avérer compliquées, toutefois on pourra s'efforcer de se ramener aux trois modèles de base suivants (n tirages avec p possibilités initiales).

Tirages successifs AVEC REMISE = **LISTES** n^p	Tirages successifs SANS REMISE = **ARRANGEMENTS** $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$	Tirages SIMULTANÉS = **COMBINAISONS** $\binom{n}{p}$

- soit directement ;
- soit en découpant l'ensemble à dénombrer en parties disjointes auxquelles s'appliquent ces modèles ;
- soit en dénombrant le complémentaire de l'ensemble à étudier et en utilisant la formule $\left|\overline{B}\right| = |A| - |B|$;
- soit en mettant en bijection l'ensemble à dénombrer avec un autre ensemble plus facile à structurer.