Chapitre 7 - Fonctions usuelles

Nos objectifs :

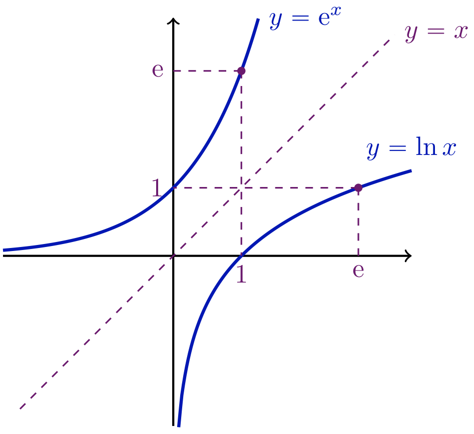
- Voir et revoir les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$, ainsi que leurs propriétés.
- Définir et manipuler les fonctions puissances. Les comparer.
- Définir et manipuler les fonctions *hyperboliques* ch et sh. Malgré les apparences, ce sont les plus faciles !
- Revoir la fonction $x \mapsto \tan x$. Les fonctions cos, sin et tan ne sont pas bijectives, mais nous allons construire des fonctions réciproques de certaines *restrictions* de ces fonctions trigonométriques : Arccos, Arcsin et Arctan. Savoir les tracer, et connaître quelques propriétés et valeurs particulières. Il faudra être solide en trigo !

1 Fonctions exponentielle, logarithme et puissances

1.1 De l'exponentielle aux puissances

Définition-théorème 1 - Fonction exponentielle et logarithme.

- On appelle *fonction logarithme (népérien)*, notée ln, l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et qui s'annule en 1 :
$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.
Elle est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- On appelle *fonction exponentielle* et notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même et telle que $\exp(0) = 1$. C'est l'unique fonction qui vérifie ces deux propriétés.
On pose $\mathrm{e}^x = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et le nombre e^1 est noté e ($\approx 2,718$).
La fonction exponentielle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les graphes des fonctions exp et ln sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.



- **Réciprocité.**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \mathrm{e}^x = x$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
- **Transformation somme/produit.**
Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln\frac{1}{x} = -\ln x \qquad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$$
- **Croissance comparée.**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \ \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$
- **Inégalités classiques.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$
et, pour tout $x \in \,]-1\,, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Démonstration. Exercice. ■

✖ **Attention !** ✖ Le réel e^x n'est pas « e multiplié x fois par lui-même », puisque en général x n'est pas un entier naturel – que signifierait « e multiplié $\sqrt{2}$ fois par lui-même » ? Cette écriture n'est qu'une NOTATION, utilisée par souci de commodité, dans la mesure où l'exponentielle transforme les sommes en produits à l'instar des puissances classiques.

Remarque 2 - Instant culturel : de nombreuses approches. Dans ce cours, on admet l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle afin de construire le logarithme. Il existe de nombreuses autres constructions du couple « $\ln, \exp$ », aucune n'étant vraiment plus simple que les autres.
Citons l'approche suivante : on commence par montrer que l'équation différentielle $y' = y$, assorti de la condition initiale $y(0) = 1$, a une unique solution, qui est la fonction exponentielle. Pour ce faire, il faut construire manuellement la solution de cette équation différentielle, et le moyen le plus efficace est d'étudier pour $x \in \mathbb{R}$, la limite de la suite

$$u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

La limite de cette suite dépend de x, et on montre que l'on construit ainsi la solution de l'équation différentielle $y' = y$. Cette idée est basée sur la méthode d'Euler que nous verrons dans le chapitre sur les équations différentielles.

Exemple 3 - Manipuler le logarithme. Simplifier l'expression $\ln((\sqrt{6} - \sqrt{5})^2) + \ln((\sqrt{6} + \sqrt{5})^2)$

Exemple 4 - Deux limites classiques. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Les fonctions logarithme et exponentielle permettent de généraliser la notion de fonctions puissances pour un exposant réel quelconque (cad non nécessairement entier).

Définition 5 - Puissances quelconques et racines nes d'un réel strictement positif. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle *x puissance y* le réel, noté x^y, défini par $x^y = e^{y \ln x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ENTIER donc), on appelle *racine n^e de x* le réel, noté $\sqrt[n]{x}$, défini par $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

✖ **Attention !** ✖

- Cette nouvelle définition $x^y = e^{y \ln x}$ n'est valable que pour des valeurs STRICTEMENT POSITIVES de x du fait de la présence du terme $\ln x$.
- Ici aussi, la notation « puissance » n'est qu'une notation, x^y n'est pas le produit y fois de x. Il n'existe aucune autre définition de x^y dans le cas où y est un réel quelconque. Par conséquent, lorsque l'on aperçoit x^y quelque part, l'exponentielle et le logarithme DOIVENT sauter aux yeux instantanément.

Exemple 6 Pour tout $x > 1$, $x^{\frac{\ln \ln x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln \ln x}{\ln x} \ln x} = e^{\ln \ln x} = \ln x$.

Théorème 7 - Propriétés algébriques des puissances. La nouvelle définition des puissances généralise effectivement l'ancienne.

(i) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les définitions $x^n = \overbrace{x \times \cdots \times x}^{n \text{ facteurs}}$ et $x^n = e^{n \ln x}$ coïncident.

(ii) Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$,

$$\ln(x^y) = y \ln x, \qquad x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \qquad x^{yy'} = (x^y)^{y'}, \qquad (xx')^y = x^y x'^y \qquad \text{et} \qquad x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

Démonstration. ... ■

Remarque 8 D'après le point **(ii)** du théorème précédent, pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x^n)^{1/n} = x^{n \times 1/n} = x \quad \text{et} \quad \left(x^{1/n}\right)^n = x^{1/n \times n} = x.$$

Autrement dit, la fonction racine n^e définie par $x \longmapsto x^{1/n}$ est la réciproque de la fonction puissance $x \longmapsto x^n$, restreinte à $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Théorème 9 - Étude des fonctions puissances. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

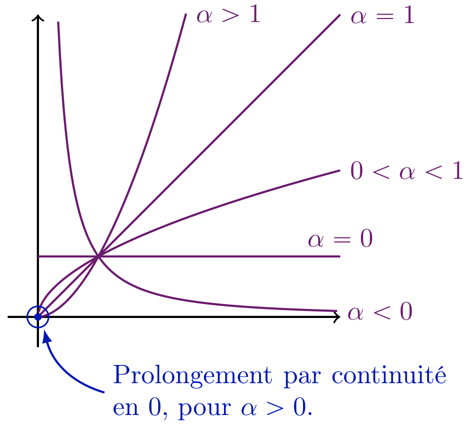
(i) La fonction $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$

En particulier, la monotonie de f_α est liée au signe de α.

(ii) Position relative.
Pour tous $x \in]0\,,1]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad \alpha \leqslant \beta \quad \Longrightarrow \quad x^\beta \leqslant x^\alpha$.
Pour tous $x \in [1\,,+\infty[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad \alpha \leqslant \beta \quad \Longrightarrow \quad x^\alpha \leqslant x^\beta$.
En particulier :

- $\forall x \in]0\,,1], \quad 0 \leqslant \ldots \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \ldots$
- $\forall x \in [1\,,+\infty[, \quad 0 \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant \ldots$



(iii) Prolongement par continuité en 0 **pour** $\alpha > 0$**.** Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction f_α par continuité en 0, en posant $0^\alpha = 0$. La nouvelle fonction obtenue est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, y compris en 0. Un tel prolongement est appelé *prolongement par continuité.*

✖ **Attention !** ✖ Pour $\alpha \in]0\,,1[$, la fonction f_α est continue en 0, mais elle y admet une tangente verticale, signe qu'elle n'est pas dérivable en 0, ce qui est notamment le cas de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} = f_{1/2}$.

✎ **En pratique** ✎ N'apprenez pas ces formules, mais retrouvez-les en évaluant les choses pour des valeurs bien choisies, en retenant que la distinction se fait selon que $0 < x \leqslant 1$ ou $1 \leqslant x$.
Par exemple, si je vous demande de comparer $\sqrt{x}$, x et x^2 pour $x \in [0, 1]$, en cas d'hésitation, testez pour $x = 0.5$.

De même qu'on peut changer la base d'une puissance, on peut changer la base d'un logarithme :

Définition 10 - Différents logarithmes. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On définit le logarithme en base a comme la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Cette fonctions s'étudie facilement à partir de la fonction logarithme, notez cependant que $\ln(a) < 0$ si $a \in]0, 1[$, même si dans les cas intéressants en pratique, on a plutôt $a > 1$ (voir ci-dessous).

Proposition 11 - Logarithmes et puissances. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Alors les fonctions $\ln_a$ et $f_a : x \mapsto a^x$ sont réciproques l'une de l'autres. De plus, on a

$$\forall x > 0, \quad f_a'(x) = \ln(a) f_a(x) = \ln(a) a^x.$$

Remarque 12 - Bases utiles. Les cas suivants sont ceux utiles en pratiques :

- Le logarithme en base 10. On l'utilise souvent pour représenter des phénomènes en échelle logarithmique.
- Le logarithme en base 2. Pratique quand on compte en binaire, typiquement en informatique.
- Le logarithme en base e. C'est le logarithme népérien connu des matheux.

Exemple 13 - Une croissance... rapide !. Combien de fois doit-on plier en deux une feuille de papier de 0.1mm pour dépasser la distance terre-lune (384 400km) ? Connaissez-vous le problème de l'échiquier de Sissa ?

Le théorème qui suit généralise les résultats de croissance comparée du théorème 1.

Théorème 14 - Croissances comparées. Le principe général est que l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui elles-mêmes l'emportent sur le logarithme.

Précisément, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta = 0$.

Démonstration. ... ∎

Remarque 15 Les résultats précédents n'abordent que le cas essentiel $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En effet :

- On s'y ramène aisément par passage à l'inverse lorsque $\alpha < 0$ et $\beta < 0$;
- Dans les autres cas, le calcul de limite ne souffre d'aucune indétermination.
- On évitera des croissances comparées trop hâtives, comme par exemple dans le cas de $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 16 - Croissances comparées. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$. **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$. **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 x^4 e^{-x}$.

Exercice 17 - Tout bouge.

1. Sur quel intervalle peut-on définir la fonction $x \mapsto x^x$? Peut-on la prolonger par continuité aux bornes ? Comment interpréter cela ?
2. Soient deux fonctions u et v de I dans $\mathbb{R}$, dérivables, avec u strictement positive. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est bien définie et dérivable sur I, et proposer une formule pour sa dérivée.

1.2 Fonctions hyperboliques

Les fonctions suivantes interviennent naturellement dans de nombreux problèmes de mécaniques :

Définition 18 - Fonctions hyperboliques. On définit les fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique*, notées respectivement sh et ch, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Remarque 19

- En plus de leurs propriétés qui rappellent les fonctions trigonométriques, ces fonctions ont bien un lien avec une hyperbole, mais ce n'est pas immédiat ! Nous en parlerons peut-être en TD.
- En réalité, l'image de la fonction ch est $[1, +\infty[$. On peut le montrer manuellement en minorant la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ou le déduire de l'étude de fonction qui va arriver.
- La fonction $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$, hors programme, a aussi des propriétés intéressantes.

Proposition 20 - Propriétés des fonctions hyperboliques.

- La fonction ch est paire, tandis que la fonction sh est impaire.
- Ces fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$$
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.

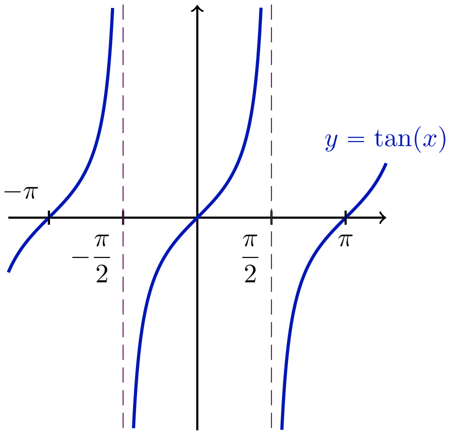
Exercice 21 - Quelques autres propriétés.

1. Réaliser une étude de fonction de sh et ch, et les tracer. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) \geqslant 1.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.

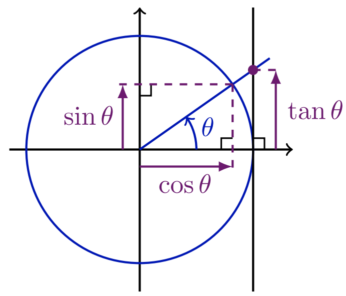
2 Fonctions circulaires et circulaire réciproques

Nous renvoyons au chapitre 1 pour l'étude des fonctions circulaires sinus et cosinus. Nous complétons leur étude par celle de la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$:

Définition-théorème 22 - Fonction tangente.



On appelle *fonction tangente* la fonction définie sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par la relation :
$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$
Elle est dérivable sur son ensemble de définition, π-périodique et impaire. En outre,
$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$



#ThéorèmeDeThalès

Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs réels de x et y pour lesquelles chaque tangente est correctement définie.[†]

- **Résolution d'équations.** $\tan x = \tan y \iff x \equiv y\ [\pi]$.
- **Formule d'addition et de duplication.**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \qquad \text{et} \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Démonstration. ... ■

Complétons les valeurs remarquables des fonctions sinus, cosinus par celles de la fonction tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

La proposition suivante permet d'exprimer le sinus et le cosinus en fonction de la tangente de l'angle moitié :

Exercice 23 - Formules de l'angle moitié.
Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, et $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que :
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$
Si de plus $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a aussi $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Ces formules seront utiles pour transformer des expressions impliquant des fonctions trigonométriques en polynômes via un changement de variable. Elles ne sont pas au programme mais il est bon de savoir qu'elles existent.

Nous allons maintenant nous intéresser à des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Ces dernières, définies sur $\mathbb{R}$, ne sont pas bijectives (regarder leur graphe !), nous allons donc les restreindre à des intervalles où elles le deviennent. Cette subtilié conduit à de nombreux pièges à éviter.

†. Le sens de cette phrase est que la bonne définition de $\tan(x+y)$ assure notamment la non nullité du dénominateur $1 - \tan x \tan y$ dans la formule d'addition de la tangente. Idem pour les autres formules.

Définition-théorème 24 - Fonction arccos et arcsin.

- La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle *fonction arcosinus* la réciproque de la fonction cosinus restreinte à $[0, \pi]$, notée $\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

  Cette fonction est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

  $$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

  Elle est décroissante sur $[-1, 1]$.
- La fonction sinus est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. On appelle *fonction arcsinus* la réciproque de la fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, notée $\text{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

  Cette fonction est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

  $$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

  Elle est croissante sur $[-1, 1]$.

Comme nous allons l'illustrer dans les exemples, voici LE piège éviter :

✖ **Attention !** ✖ Les fonctions Arccos et Arcsin ne sont pas les réciproques des fonctions cos et sin, mais celles de leurs restrictions aux intervalles $[0, \pi]$ et $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}\, x) = x.}$, mais $\boxed{\text{FAUX : } \cancel{\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\cos x) = x}.}$

$\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos x) = x.}$

Saurez-vous distinguer le faux du vrai pour la fonction Arcsin ?

A vous de remplir la table des valeurs particulières pour ces fonctions :

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arccos}\, x$						
$\text{Arcsin}\, x$						

On ne les a pas toutes mises, à vous de les retrouver facilement.

Exercice 25 - Ne tombez pas dans les pièges.

1. Montrer que la fonction Arcsin est impaire mais que la fonction Arccos ne l'est pas.
2. Calculer $\text{Arccos}(\cos(\frac{5\pi}{3}))$ et $\text{Arcsin}(\sin(-\pi))$.
3. Pour $x \in [-1, 1]$, caluler $\sin(\text{Arccos}\, x))$ et $\cos(\text{Arcsin}(x))$. En déduire $\tan(\text{Arccos}\, x)$ et $\tan(\text{Arcsin}\, x)$.
4. Etudier sur leur ensemble de définition les fonctions $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x))$ et $x \mapsto \text{Arccos}(\cos x))$.

Exercice 26 - Une formule qui marche.

Caluler pour $x \in [-1, 1]$ la valeur de $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x)$.

Définition-théorème 27 - Fonction arctangente.

La fonction tangente est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *fonction arctangente* la réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, notée $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

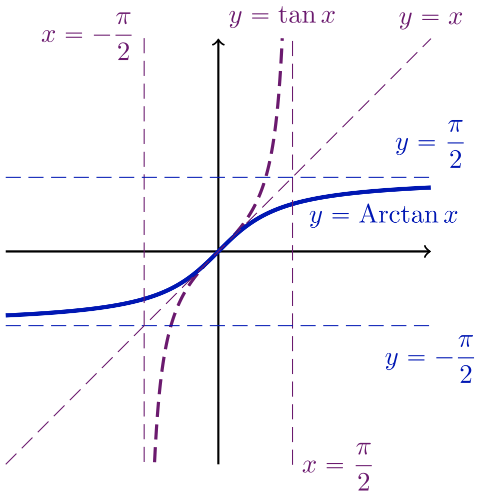
Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Elle est croissante sur $[-1,1]$.

La courbe de la fonction arctangente possède une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $y = -\dfrac{\pi}{2}$ au voisinage de $-\infty$).

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\mathrm{Arctan}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Exercice 28 - Ne tombez pas dans le piège, bis.
Tout comme ci-dessus, on évitera d'écrire que $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$ pour tout x dans l'ensemble de définition de tan. A vous de retrouver le faux du vrai comme pour la fonction Arccos. Pour aller plus loin, etudiez la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\tan(x))$ sur son ensemble de définition.

Démonstration. ... ■

Exemple 29 - Une étrange formule. Etudier la quantité $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

✎ **En pratique** ✎ Ces trois fonctions sont vraiment nouvelles, et on prendra son temps lorsqu'on les manipulera. Toute lacune sur les fonctions trigonométriques "directes" se payera chère ! En outre, elles fournissent de nouvelles primitives usuelles, pour les fonctions $\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$, nous y reviendrons dans le chapitre dédié.

3 Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant indique les dérivées des fonctions usuelles : la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, de dérivée f'.

	$f(x)$	$f'(x)$	I
1	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\ ]0\,,+\infty[& \text{sinon} \end{cases}$
2	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,0[$
3	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
4	a^x (a>0)	$\ln a \times a^x$	$\mathbb{R}$
5	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
6	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
7	$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[+ k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
8	$\mathrm{Arctan}\, x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
9	$\mathrm{Arccos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
10	$\mathrm{Arcsin}\, x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
11	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
12	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$

Remarque 30 Pour la ligne 4, il est sûrement préférable de se ramener à la forme exponentielle $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.