Feuille d'exercices 10
Dérivabilité

Exercice 1 ●○○ **Vrai ou faux ?** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en citant le cours (ou en faisant une preuve), ou en exhibant un contre-exemple :

1. Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire, alors sa dérivée est impaire.
2. Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ a sa dérivée paire, alors elle est impaire.
3. Si une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée est continue.
4. Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet une tangente horizontale en un extremum.
5. Sur un intervalle $[a, b]$, si une fonction dérivable admet un maximum, alors sa dérivée s'annule en ce point.

Exercice 2 ●○○ **Une fonction auxiliaire** Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e\ln(x) - x$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire une comparaison entre π^e et e^π.

Correction :

Méthode :

1. Standard, on calcule la dérivée.
2. Faire un lien avec f, peut-être $f(\pi)$?

Détails :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}.$$
Ainsi, $f' > 0$ sur $]0, e[$ et $f' < 0$ sur $]e, +\infty[$. On déduit que f est maximal en e, et le maximum vaut $f(e) = e - e = 0$.
2. Daprès la question précédente, on a
$$\forall x \neq e, \quad f(x) < 0,$$
et donc
$$f(\pi) < 0 \iff e\ln\pi < \pi \iff e^{e\ln\pi} < e^\pi \iff \pi^e < e^\pi.$$

Exercice 3 ●○○ **Une famille de fonction (ENAC 2023)** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 aux fonctions f_λ sont concourrantes.

Correction :

Méthode : les plus zélés donneront l'équation de la tangente à la courbe de f_λ en un point a, mais on peut répondre rapidement à la première question en utlisant l'interprétation du nombre dérivée pour la tangente.

Détails :

1. Calculons le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f_λ. Celui-ci vaut $f'_\lambda(0)$, or
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x(x+\lambda)}{(x^2+1)^2},$$
et donc
$$f'_\lambda(0) = 1.$$
Cela prouve que toutes les tangentes en 0 ont un coeffcient directeur de 1, et sont donc parallèles.
2. Ecrivons l'équation de la tangente à la courbe de f_λ en 1 :
$$y = f'_\lambda(1)(x-1) + f_\lambda(1) \iff y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{1+\lambda}{2}.$$
On cherche donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que la relation ci-dessus soit vérifée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1 - \frac{x}{2})\lambda + \frac{1}{2} - y = 0.$$
On doit alors voir cette propriété comme une fonction affine (en λ) qui est nulle, d'où la condition nécessaire et suffisante :
$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$
Conclusion : les tangentes sont toutes concourrantes puisqu'elles passent toutes par le point $(2, \frac{1}{2})$.

Exercice 4 ●○○ — Régularité Etudier la « régularité » des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition (c'est-à-dire jusqu'où va leur régularité dans les différentes notions de continuité et de dérivabilité) :

1. $x \mapsto \sqrt{-x^2+x+6}$ (préciser l'ensemble de définition).
2. $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ (on se contentera de la continuité).
3. $x \mapsto x\sqrt{|x|}$.

Exercice 5 ●●○ — Définie par morceaux Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ be^{bx} - (c+12)x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une CNS pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une CNS pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Méthode :

La fonction est définie par morceaux. Il faut raccorder en $x = 0$. Donc, on étudie les limites à droite et à gauche pour étudier la continuité, et on fait de même pour le caractère C^1 avec un théorème du cours.

Détails :

Déjà, il est clair que la fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Etudions ce qu'il se passe en 0.

1. On commence par la continuité, en calculant les limites à droites et à gauche. On a clairement à droite :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} be^{bx} - (c+12)x = b.$$

A gauche, c'est un peu plus délicat car c'est une forme indeterminée. On rappelle que

$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

et donc en posant $X = ax$, et en écrivant

$$\frac{\sin ax}{x} = a\frac{\sin ax}{ax} = a\frac{\sin X}{X},$$

on déduit que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a.$$

Finalement, f est continue en 0 si et seulement si

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \iff b = a = 1.$$

2. Il reste à trouver une CNS pour que f soit de plus dérivable, et de dérivée continue. On applique le théorème de la limite de la dérivée : il suffit que f soit continue, et que de plus

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

On calcule les dérivées puis les limites, comme à la question précédente. On trouve comme condition (erreur de calcul possible)

$$0 = b^2 - c - 12,$$

soit $c = -11$.

Pour aller plus loin Les DL (développements limités) à l'ordre 1, aperçu pour l'instant, et qui coïncident avec les équations des tangentes, permettent de donner les résultats très rapidement. On verra au S2 comment obtenir ces DL très rapidement.

Par ailleurs, dans les applications, en conception industrielle par exemple, il est courant de manipuler des fonctions définies par morceaux, comme les *splines*.

Exercice 6 ●○○ — Formule de Leinbitz et astuce Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^4e^{5x}$.

Correction :

Méthode :

On appliquer la formule de Leinbitz, en notant que les dérivées de $x \mapsto x^4$ s'annule au bout d'un moment.

Détails :

Définissons sur $\mathbb{R}$ les fonctions $u(x) = x^4$ et $v(x) = e^{5x}$, ainsi que $f(x) = u(x)v(x)$. On peut calculer leur dérivée successives :

$$u^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{4!}{(4-k)!}x^{4-k} & \text{si } k \leqslant 4 \\ 0 \text{ si } k > 4 \end{cases}$$

et

$$v^{(k)}(x) = 5^k e^{5x}.$$

Noter que si on n'apprécie pas la formule pour $u^{(k)}$, on peut lister les dérivées sucessives jusqu'à $k = 4$. On applique la formule de Leinbitz :

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} u^{(k)}v^{(n-k)} \quad \text{puisque} \quad u^{(k)} = 0 \quad \text{pour} \quad k > 4.$$

Notez que la formule est vraie lorsque $n < 4$ grâce à la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $n < k$. On remplace par les dérivées calculées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} \frac{4!}{(4-k)!} x^{4-k} 5^{n-k} e^{5x}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer cette somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \left(a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3 + e_n x^4\right) e^{5x}$$

avec (erreurs de calculs possibles)

$$\begin{cases} a_n = 5^n \\ b_n = 4n5^{n-1} \\ c_n = 6n(n-1)5^{n-2} \\ d_n = 4n(n-1)(n-2)5^{n-3} \\ e_n = n(n-1)(n-2)(n-3)5^{n-4} \end{cases}$$

Exercice 7 ••• — **Une fonction plate qui décolle** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n et un entier $q_n \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée n-ième de f est de la forme

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{q_n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. En déduire que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner ses dérivées en 0.

Correction :

Méthode :

1. On peut calculer f' pour comprendre la situation, puis procéder par récurrence. On ne demande pas d'expliciter le polynôme P_n !
2. Le seul point qui pose problème est 0. Etudier les limites à droite et à gauche de f et de ses dérivées, en 0.

Détails :

1. La fonction f est C^∞ en tant que composée sur $]0, +\infty[$. On s'échauffe :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Le calul de la dérivée seconde s'annonce déjà pénible... Montrons la formule proposée par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, la formule est vraie en posant $P_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

Hérédite : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, il existe un polynôme P_n et un entier a_n tels que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{q_n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Dérivons :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n'(x)x^{q_n} - P_n(x)(q_n x^{q_n - 1})}{x^{2q_n}} + \frac{P_n(x)}{x^{q_n}} \times \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

On simplifie et on met au même dénominateur : pour $x > 0$, on a

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n'(x)x - q_n P_n(x)}{x^{q_n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{q_n+2}}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2 P_n'(x) + (1 - q_n x)P_n(x)}{x^{q_n+2}}.$$

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - q_n x)P_n(x),$$

et l'entier $q_{n+1} = q_n + 2$. La fonction P_{n+1} est bien un polynôme, en tant que somme, produit et dérivée de polynômes. Ainsi, la propriété est héréditaire.

On conclut par principe de récurrence.

Pour aller plus loin : Peut-on expliciter le polynôme P_n ? La suite d'entier (q_n) est tout à fait explicite puisqu'elle est arithmétique de raison 2, de premier terme $q_0 = 0$, et vérifie donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = 2n.$$

Ainsi, la suite de polynômes est définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - (n+2)x)P_n(x) \\ P_0 = 1 \end{cases}$$

Cette relation est constructive, sans être explicite. Il est très fréquent d'avoir des suites de polynômes définies par récurrence dans des sujets d'écrit, et on peut vous demander de trouver le degré, le corfficient dominant, etc... Il faut intuiter les réponses, et les preuves se font par récurrence.

2. Si on pose $X = \frac{1}{x}$, alors

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{q_n}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \to +\infty} X^{q_n} e^{-X} = 0 \text{ par croissance comparée,}$$

et donc par produit de limites, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{P_n(x)}{x^{q_n}} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

De manière évidente, puisque $f = 0$ sur $] - \infty, 0[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0, \quad f^{(n)}(x) = 0,$$

et donc

$$\lim_{x \to 0^-} f^{(n)}(x) = 0.$$

Ainsi, en appliquant successivement (c'est-à-dire en appliquant une récurrence directe) le théorème de la limite de la dérivée, la fonction f est infiniement dérivable en 0, avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Exercice 8 ●●○ **Valeur absolue d'une fonction** Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.

1. Montrer que si $f(a) \neq 0$, la fonction $|f|$ est dérivable en a.
2. On suppose que $f(a) = 0$. A l'aide d'un développement limité en 0, montrer que $|f|$ admet des dérivées à gauche et à droite en 0, et dire si $|f|$ est dérivable en 0 (on distinguera les cas selon la valeur de $f'(a)$).
3. En déduire une CNS pour que $|f|$ soit dérivable en a.

Exercice 9 ●●○ **Une forme indeterminée** Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Déterminer

$$\lim_{x\to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x-a}.$$

Exercice 10 ●●○ **Inverser une fonction** Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ \ \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[\backslash\{0\})$ et déterminer f' sur $]-1,1[\backslash\{0\}$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1(]-1,1[)$, et donner $f'(0)$.
4. Etablir les variations de f sur $[-1, 1]$. montrer que f établit une bijection sur un ensemble J à préciser.
5. Montrer que $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(J)$, et déterminer $(f^{-1})'$.

Correction :

Méthode :

1. En dehors de 0, on invoque les théorèmes généraux en utilisant les mots justes. En 0, il faut vérifier que la limite vaut la valeur $f(0)$ imposée.
   Comment calculer la limite ? Le plus direct est la technique du conjugué, si on y pense pas on peut reconnaître le taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Avoir en tête que les DL permettront de calculer cette limite facilement.
2. Standard, on invoque les théorèmes généraux et on calcule.
3. Question dure. Pour montrer la dérivabilité en 0 et trouver $f'(0)$, on doit calculer le taux d'accroissement de f en 0, et déterminer sa limite. Pour montrer que f est $\mathscr{C}^1$, il faut montrer que la limite de f' (calculer ci-dessus) vaut $f'(0)$.
   On peut tout faire d'un coup grâce au théorème de la limite de la dérivée : si f' a une limite, alors f est $\mathscr{C}^1$ et on obtient $f'(0)$.
4. Standard.
5. Appliquer un rédultat du cours. Trouver $(f^{-1})'$ est dur.

Détails :

1. La fonction f est continue sur $[-1,1]\backslash\{0\}$ comme composée et quotient de telles fonctions. Seule la continuité en 0 n'est pas claire. Il faut déterminer la limite en 0, qui est clairement une FI.
   On peut faire apparaître des taux d'accroissement, mais le plus direct est d'utilser la technique du conjugué lever la FI :
   $$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) &= \frac{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) \\ &= \frac{1+x^2-(1-x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$
   On voit alors que
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$
   ce qui donne la continuité en 0.
   Notez qu'avec un DL (voir S2), le calcul de limite devient assez facile.
2. On a $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[\backslash\{0\})$ par les mêmes arguments que ci-dessus. Après calculs, on obtient :
   $$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\} : f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}.$$
3. On applique le théorème de la limite de la dérivée (voir méthode ci-dessus).
   On transforme f' avec la même technique du conjugué :
   $$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}},$$
   et donc
   $$\lim_{\to 0} f'(x) = 2.$$
   Comme f est continue en 0, le théorème de la limite de la dérivée assure que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 2$, et que f' y est continue. Ainsi, $f \in \mathscr{C}^1([-1,1])$.
4. D'après la question précédente, $f' > 0$, donc f est srictement croissante, comme elle est de plus continue, elle réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $J = [f(-1), f(1)] = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
5. Comme f' ne s'annule pas, $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(J)$, et $\left(f^{-1}\right)'$ se calcule avec la formue :
   $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$
   A finir.

Exercice 11 ●●○ — Un encadrement du logarithme Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

En déduire un encadrement de $\ln(1,01)$.

Correction :

Méthode :

Une inégalité avec une fonction d'une part et "x" d'autre part ? cela sent les accroissements finis à plein nez.

Détails :

Fixons $x > 0$, on applique l'égalité des accroissements finis à $f : t \mapsto \ln(1+t)$, entre 0 et x.

$$\exists c \in [0, x], \quad f(x) - f(0) = (x-0)f'(c) \iff f(x) = x \times \frac{1}{1+c}.$$

Notons que c dépend de x, mais

$$0 \leqslant c \leqslant x \iff \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+c} \leqslant 1 \iff \frac{x}{1+x} \leqslant x \times \frac{1}{1+c} \leqslant x \quad \text{car } x > 0$$

et donc avec l'égalité des accroissements finis :

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$$

et ce pour tout $x > 0$.

On déduit l'encadrement demandé avec $x = 0,01$.

Pour aller plus loin : On aurait pu montrer à la main $\ln(1+x) \leqslant x$ et $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x)$, par exemple en étudiant les différences $\ln(1+x) - x$ et $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ (dérivées, variations, etc...). On constate que les accroissements finis sont un puissant outil pour trouver des inégalités, il faut y penser :

- Lorsque un des membres ressemble à la dérivée de l'autre,
- Pour des inégalités comparant $f(x) - f(a)$ à $x - a$,
- Et plus généralement dès qu'on est bloqué sur une inégalité.

Exercice 12 ●○○ — Des propriétés pour f' Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et dérivable sur $]0,1[$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1], \; f'(x) \neq 0.$$

1. Montrer que pour $x \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$.
2. Montrer que f garde un signe constant sur $]0,1[$.

Exercice 13 ●●● — Couper l'exponentielle Pour un polynôme P donné, on s'intéresse à l'équation $P(x) = e^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier le cas où P est une fonction affine.
2. Montrer par récurrence que l'équation a au plus $n+1$ solutions, où n est le degré de P (pour l'hérédité, on pourra supposer par l'absurde que l'équation $P(x) = e^x$ avec P de degré $n+1$ admet au moins $n+3$ solutions).

Exercice 14 ●●○ — Une histoire de corde Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(1) = f'(0) = 0.$$

On veut montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe de f en c passe par l'origine.

1. Traduire le problème par une équation sur c.
2. Démontrer le résultat, en étudiant la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On commencera par calculer la dérivée pour chercher un lien avec la question précédente.

Correction :

Méthode :

1. Excellente question pour s'entrainer à lire un énoncé. Savez-vous écrire l'équation d'une tangente, ou exploiter l'équation d'une droite ?
2. On a sûrement déjà dérivé ce genre de fonction, le numérateur de la dérivée doit vous faire penser à la question précédente.

Détails :

1. Etant donné $c \in]0,1[$, l'équation de la tangente à la courbe en c est

$$y = f(c) + (x-c)f'(c).$$

Cette droite coupe l'axe des ordonnées ($x = 0$) en un point d'ordonnée $y = f(c) - cf'(c)$ (c'est le terme "constant" de l'équation de la droite). Ainsi, la question revient à montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f(c) - cf'(c) = 0.$$

Un dessin est obligatoire !

2. La fonction g est clairement continue et dérivable sur $]0,1]$, et on a

$$\forall x \in]0,1], \quad g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

En particulier, pour $c \in]0,1]$:

$$f(c) - cf'(c) = 0 \iff g'(c) = 0.$$

Ainsi, d'après la question **1**, le problème est équivalent à montrer que g' s'annule. On va appliquer le théorème de Rolle à g. On a déjà vérifié que g était dérivable sur $]0,1]$, de plus, on a

$$\forall x \in]0,1], \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Ainsi, on reconnait un taux d'accroissement, et on a

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = f'(0) = 0 \text{ par hypothèse.}$$

Puisque par construction, on a $g(0) = 0$, cela prouve que la fonction g est continue en 0.

Par ailleurs, on a $g(1) = f(1) = 0$. Pour résumer, on a

$$\begin{cases} g \text{ est continue sur } [0,1] \\ g \text{ est dérivable sur }]0,1[\\ g(0) = g(1) = 0. \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de Role à g :

$$\exists c \in]0,1[, \quad g'(c) = 0,$$

et le point c répond à la question d'après ce qui précède.

Exercice 15 ●●○ Extension de Rolles : se ramener à un segment

1. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a).$$

a. On souhaite définir la fonction g sur $]0,1]$ par $g(x) = f(\frac{1}{x} + a - 1)$. Vérifier que cette fonction est bien définie et dérivable. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0.

b. En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. Quelle est l'idée derrière la fonction g ?

2. On suppose maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

En introduisant une fonction basée sur le changement de variable $x = \tan t$, avec $x \in \mathbb{R}$, montrer avec des idées similaires que f' s'annule en au moins un point.

Correction :

Méthode :

1. **a.** Il faut vérifier que $\frac{1}{x} + a - 1 \in [a, +\infty[$, puis utiliser une composition de limite pour prolonger par continuité en 0.

b. Appliquer Rolle à g.

2. S'inspirer de la stratégie précédente.

3. Reprendre les preuves du cours ?

Détails :

1. **a.** On a

$$0 < x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant \frac{1}{x} \iff a \leqslant \frac{1}{x} + a - 1$$

et donc on $\frac{1}{x} + a - 1$ est bien dans l'ensemble de définition de f, on peut donc définir par composition $g : x \mapsto f(\frac{1}{x} + a - 1)$. Cette fonction est bien dérivable comme composée de fonction dérivable. De plus, on a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + a - 1 = +\infty$$

et donc par composition,

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x} + a - 1) = \lim_{X \to +\infty} f(X) = f(a) \text{ par hypothèse.}$$

Ainsi, on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(a)$.

b. La fonction g (prolongée en 0) est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$, on peut donc lui appliquer le théorème de Rolle :

$$\exists \gamma \in]0,1[, \quad g'(\gamma) = 0.$$

Or,

$$\forall x \in]0,1], \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x} + a - 1).$$

$$-\frac{1}{\gamma^2} f'(\frac{1}{\gamma} + a - 1) = 0 \iff f'(\frac{1}{\gamma} + a - 1) = 0,$$

et on obtient le résultat en posant $c = \frac{1}{\gamma} + a - 1$.

L'idée a été de ramener "l'infini" en 0, à l'aide d'un changement de variable explicite, basée sur la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction g ainsi obtenue encode une grande partie du comportement de f : la limite en 0^+ de f est la limite de f en $+\infty$. Pour aller plus loin : ce type de changement de variable est appelée (dans des mathématiques avancées) une "compactification".

2. Inspiré(e) par ce changement de variable, on peut définir $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = f(\tan(x)).$$

On suit alors pas à pas les idées de la correction précédente en adaptant.

3. On peut chercher à montrer que les fonctions en jeu admettent un extremum à l'intérieur de leur ensemble de définition, ce qui revient à reprendre la preuve du théorème de Rolle. Les méthodes ci-dessus sont plus efficaces.

Exercice 16 ●●○ Relation de récurrence

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4}\ln(u_n), \ n \geqslant 0 \\ u_0 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [3, 4]$.

2. Introduire une fonction f de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$, et montrer que f possède un unique point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$, dans l'intervalle $[3, 4]$. On note α ce point fixe.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{12}|u_n - \alpha|.$$

4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$