Feuille d'exercices 11
Primitives et équations différentielles

Exercice 1 •○○ **Composée, fractions rationnelles et autres** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de définition :

1. $x \mapsto -6xe^{x^2}$ **2.** $x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$ **3.** $x \mapsto -x^2\sin(x^3)$ **4.** $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
5. $x \mapsto \frac{-2e^x}{e^x+3}$ **6.** $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ **7.** $x \mapsto \frac{x+23}{x^2-3x-10}$
8. $x \mapsto \frac{3}{x}\ln x$ **9.** $x \mapsto \frac{x^3}{1+x}$ **10.** $x \mapsto \tan^2 x$

Correction :
Méthode : L'idée générale est de faire apparaître une composée, de la forme $u'(x)\times g(u(x))$, avec g et u "à deviner", et "à un facteur près". La mise en évidence de u' demande souvent de "jouer" avec les facteurs (technique du balayeur, etc...).
Le plus efficace est de d'abord repérer u (et g), calculer à part u', et jouer pour faire apparaître u'. Avec de la pratique, c'est rapide et facile, mais sans pratique cela ne marchera pas...
Détails :

1.

2. On a
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 1+x^2>0,$$
et donc la fonction est définie est continue sur $\mathbb{R}$. Les primitive seront définies sur $\mathbb{R}$.
On écrit
$$-\frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}\quad \text{avec } u(x)=1+x^2,$$
Or on a la formule $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, ainsi :
$$\int^x -\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

3. La fonction est définie est continue sur $\mathbb{R}$. Les primitive seront définies sur $\mathbb{R}$.
On écrit
$$-x^2\sin(x^3) = -\frac{1}{3}\times(3x^2\sin x^3) = -\frac{1}{3}u'(x)\sin(u(x))\quad \text{avec } u(x)=x^3,$$
Or on a la formule $\int u'\sin u = -\cos u$, ainsi :
$$\int^x(-t^2\sin(t^3))\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\times(-\cos x^3) = \frac{1}{3}\cos x^3.$$

4. La fonction ch vérifie
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \operatorname{ch} x \geqslant 1,$$
et donc la fonction $x\mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et continue, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Les primitives sont aussi définies sur $\mathbb{R}$.
On a
$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{u'(x)}{u(x)}\quad \text{avec } u(x)=\operatorname{sh} x,$$
Or on a la formule $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, ainsi :
$$\int^x \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \ln|\operatorname{ch} x| = \ln(\operatorname{ch} x)\quad \text{car}\quad \operatorname{ch} x>0.$$

5. On a
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x+3>3,$$
et donc la fonction $x\mapsto\frac{-2e^x}{e^x+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et continue, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Les primitives sont aussi définies sur $\mathbb{R}$.
On écrit :
$$\frac{-2e^x}{e^x+3} = -2\frac{u'(x)}{u(x)}\quad \text{avec } u(x)=e^x+3.$$
Or on a la formule $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, ainsi :
$$\int^x \frac{-2e^t}{e^t+3}\,\mathrm{d}t = -2\int^x \frac{e^t}{e^t+3}\,\mathrm{d}t = -2\ln|e^x+3| = -2\ln(e^x+3)\quad \text{car}\quad e^x+3>0>0.$$

6. La fonction est bien définie sur
$$I=\{x\in\mathbb{R},\ x>0 \text{ et } \ln x\neq 0\}$$
Or $\ln x = 0 \iff x=1$, ainsi, la fonction est bien définie sur
$$I=\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Elle y est continue comme quotient, donc les primitives sont bien définies sur I. Mais où est donc le numérateur ? On écrit :

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = \ln x.$$

Or on a la formule $\int \frac{u'}{u} = \ln |u|$, ainsi :

$$\int^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln|\ln x| = \begin{cases} \ln(\ln x) & \text{si } x > 1 \\ \ln(-\ln x) = \ln(\ln \frac{1}{x}) & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

7.

8. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et les primitives sont aussi définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ici, il ne faut pas voir un quotient mais un produit ! On écrit

$$\frac{3}{x} \ln x = 3u'(x) \times u(x), \quad \text{avec} \quad u(x) = \ln x,$$

Or on a la formule $\int u' \times u = \frac{1}{2}u^2$, ainsi :

$$\int^x \frac{3}{t} \ln t\,\mathrm{d}t = 3\int^x \frac{1}{t} \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}(\ln x)^2$$

9. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et les primitives sont aussi définies sur cet ensemble.
Nous verrons le procédé de “division des polynômes”, qui permet d'écrire directement la décomposition souhaitée. En attendant, on peut faire le calcul manuellement, l'idée étant de faire “apparaître” le dénominateur $1 + x$ au numérateur :

$$\frac{x^3}{1+x} = \frac{(x+1-1)^3}{1+x}$$

On applique le binôme de Newton

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2, \quad \text{avec} \quad a = x+1 \text{ et } b = 1.$$

On obtient :

$$\frac{(x+1-1)^3}{1+x} = \frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1}{x+1} = (x+1)^2 - 3(x+1) + 3 - \frac{1}{x+1},$$

et donc en développant et réorganisant la “partie entière”

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad \frac{x^3}{1+x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

On déduit directement une primitive :

$$\int^x \frac{t^3}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int^x t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|$$

10. Fait en TD, remarquer que $\tan' = 1 + \tan^2$.

Exercice 2 ●○○ **Primitives en vrac** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ **2.** $x \mapsto \frac{1}{-2x^2+12x-18}$ **3.** $x \mapsto \frac{x-7}{-2x^2+12x-18}$

4. $x \mapsto \frac{3}{-6x^2-x+12}$ **5.** $x \mapsto \frac{3x-\frac{11}{4}}{-6x^2-x+12}$ **6.** $x \mapsto \frac{1}{8x^2-48x+74}$

7. $x \mapsto (6x^2-2x+6)e^{2x}$ **8.** $x \mapsto e^{-3x}(6\cos(2x) - 5\sin(2x))$

Correction :
Méthode :
Détails :

1.
2.
3.
4.
5.
6. On pose $P(x) = 8x^2 - 48x + 74 = 2(4x^2 - 24x + 37)$, que l'on cherche à réduire. Le discriminant de $x \mapsto 4x^2 - 24x + 37$ vaut $24^2 - 4 \times 4 \times 37 = 16 \times (6 \times 6 - 37) = -16 < 0$, donc P n'a pas de racines réelles, et on se dirige vers la forme canonique. On a

$$P(x) = 8\left(x^2 - 6x + \frac{37}{4}\right) = 8\left((x-3)^2 - 9 + \frac{37}{4}\right) = 8\left((x-3)^2 + \frac{1}{4}\right).$$

On a alors

$$\int^x \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int^x \frac{1}{(t-3)^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$$

C'est alors classique : on réalise d'abord le changement de variable $u = t - 3$:

$$\int^x \frac{1}{(t-3)^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t = \int^{x-3} \frac{1}{u^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}u$$

puis le changement de variable tel que $u^2 = \frac{1}{4}v^2$, soit $v = 2u$:

$$\int^{x-3} \frac{1}{u^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}u = \int^{2x-6} \frac{1}{\frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}v}{2} = 2\int^{2x-6} \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{Arctan}(2x-6).$$

Finalement, en pensant au facteur $\frac{1}{8}$:

$$\int^x \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}(2x-6).$$

7.
8.

Exercice 3 ●○○ **IPP** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ **2.** $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ **3.** $x \mapsto 3x^2 \ln(1+x)$
4. $x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$ **5.** $x \mapsto (\sin x)e^x$ (avec ou sans IPP) **6.** $x \mapsto (x^2+1)\sin(2x)$

Exercice 4 ●●○ On désire calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 2}\,\mathrm{d}x$$

1. Pour $x \in]-\pi, \pi[$, on note $t = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer que :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

2. En déduire que

$$I = \int_a^b \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$$

avec a et b à déterminer.

3. En déduire I.

Exercice 5 ●●○ **Une histoire de composées** On souhaite définir la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{x^3} e^{\sqrt{t}} dt.$$

Donner le domaine de définition et celui de dérivabilité de f. Calculer la dérivée sur le domaine de dérivabilité.

Exercice 6 ●●○ **Changements de variable** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ **2.** $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$ **3.** $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln x}$
4. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}$ **5.** $x \mapsto \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x}$

Exercice 7 ●●○ **EDL1** Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'(x) - 2xy(x) = 6x$ sur $\mathbb{R}$. Et avec $y(0) = 1$?
2. $y'(x) + \frac{2}{x^3}y(x) = (-2x+3)e^{\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Et avec $y(1) = e$?
3. $xy'(x) - y(x) = x\ln x$ sur $]0, +\infty[$. Et avec $y(1) = -3$?
4. $(x+1)y'(x) - xy = 2x^2 - x + 2$ sur $]-1, +\infty[$. Et avec $y(1,5) = 5e^{1,5}$?

Correction :
Méthode :
Détails :

1.
2.
3. On normalise l'équation en divisant par x :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \quad xy'(x) - y(x) = x\ln x \iff y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \ln x.$$

On associe l'équation homogène :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \quad y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 0.$$

Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $e^{\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} = e^{\ln|x|} = x$ pour $x > 0$. Ainsi les solutions de l'équations homogènes sont les fonctions

$$y_h : x \mapsto \lambda x, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.

Exercice 8 ●●○ **EDL2** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.
$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = x + \sin x - e^{3x} + e^{4x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = 3\sin(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y''(x) + 8y'(x) + 25y(x) = e^{-4x}\cos(5x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Exercice 9 ●●● **Equations fonctionnelles**

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$
3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f(x) + \int_0^2 f(t)dt \text{ et } f(1) = 3.$$

Correction :
Méthode :

1. Dériver l'équation fonctionnelle, et la réutiliser avec $-x$ à la place de x.

Détails :

1. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :
Puisque f est deux fois dérivable, on peut dériver l'équation fonctionnelle ; Ainsi, si f est solution, alors on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(-x).$$
Or, en utilisant l'équation fonctionnelle : $f'(-x) = f(-(-x)) = f(x)$. Ainsi, si f est solution, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f(x).$$
et donc après résolution rapide de cette équation différentielle (que l'on connait normalement par coeur)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x, \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$
Synthèse : Le raisonnement ci-dessus ne donne qu'une condition nécessaire (car on a dérivé). On doit vérifier si les candidats trouvés sont solution. Pour $f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$, on a
$$f'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x \quad \text{et} \quad f(-x) = \alpha\cos x - \beta\sin x$$
Ainsi, f est solution si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\alpha\sin x + \beta\cos x = \alpha\cos x - \beta\sin x \iff (\beta-\alpha)\cos x + (\beta-\alpha)\sin x = 0.$$
Attention à ne pas dire trop vite "par identification, $\beta - \alpha = 0$"... En évaluant cette relation pour $x = 0$, on obtient que $\beta - \alpha = 0$, donc que $\alpha = \beta$, ce qui est bien une condition suffisante (on dira au semestre 2 que la famille $(\cos, \sin)$ est libre). Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\{x \mapsto \alpha(\cos x + \sin x), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 10 ●●● **Changement de variable dans une equadiff** On considère l'équation différentielle suivante :
$$\forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 6x - 1 \tag{1}$$

1. Cette équation différentielle rentre-t-elle dans le cadre du cours ?
2. Nous allons effectuer le changement de variable $x = e^t$. Etant donnée une solution y de (1), on introduit pour cela la fonction $z : t \mapsto y(e^t)$. Quel est le domaine de définition de la fonction z ? Montrer qu'elle est deux fois dérivable sur son domaine de définition.
3. Exprimer y en fonction de z, puis les dérivées première et seconde de y en fonction de celles de z.

4. Démontrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + z(t) = 6e^t - 1. \tag{2}$$

5. Résoudre cette équation différentielle, puis en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale (1).

Correction :
Méthode :

1. Identifier ce qui change avec le cadre du cours.

2. Prendre le temps de comprendre ce que veut dire l'énoncé.

3. La question clef. Si $z(t) = y(e^t)$, alors que comment exprimer $y(x)$ en fonction de z ?

4. Assez direct si on a bien fait la question d'avant.

5. On peut enfin appliquer le cours.

Détails :

1. C'est une équation différentielle linéaire d'orre 2, mais les coefficients sont non constants. Nous n'avons pas vu de méthode pour résodre cette équation.

2. La fonction z est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme la composée de y est de la fonction exponentielle. Elle est donc deux fois dérivable si y l'est, en tant que composée.

3. Soit $x > 0$, on peut écrire $x = e^t$ avec $t = \ln x$, et donc $y(x) = y(e^t) = z(t) = z(\ln x)$. Finalement :
$$\forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln x).$$
On a alors (c'est le calcul clef), par dérivation d'une composée :
$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) \quad \text{et} \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x).$$
Pour prendre du recul, regardez comment parvenir à cette formule sans “variables”. On pose $\varphi : t \mapsto e^t$ le changement de variable, on a alors
$$z = y \circ \varphi$$
et puisque φ est bijective :
$$y = z \circ \varphi^{-1},$$
et puisque φ^{-1} est la fonction logarithme, on a bien
$$\forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln x).$$
Il est préférable dans un premier temps de raisonner avec les variables. C'est ce que fait un physicien !

4. On utilise la question précédente. Quand on compare ce qu'on nous demande et l'équation initiale, on se doute qu'il suffit de se concentrer sur les dérivées. On a
$$x^2 y''(x) + x y'(x) = z''(\ln x) - z'(\ln x) + z'(\ln x) = z''(\ln x)$$
et donc en effecuant le changement de variable dans l'équation différentielle, on trouve que y est solution si et seulement sit ma fonction z vérifie
$$z''(\ln x) + z(\ln x) = 6x - 1,$$
Soit avec $t = \ln x$:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + z(t) = 6e^t - 1.$$
Attention : ces méthodes de changement de variables sont subtiles, car $z''(\ln x)$ désigne la fonction z'' évaluée en $\ln x$, et non pas la dérivée seconde de $x \mapsto z(\ln(x))$.

5. Résolvons cette nouvelle équation différentielle, qui est bien linéaire à coefficients constants. On lui associe l'équation différentielle homogène
$$z''(t) + z(t) = 0,$$
dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. On trouve rapidement (et c'est à savoir par coeur) que les solutions sont de la forme
$$z(t) = A\cos t + B\sin t, \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
On cherche ensuite des solutions particulières z_{p_1} et z_{p_2} pour chacune des équations différentielles
$$z''(t) + z(t) = e^t \quad \text{et} \quad z''(t) + z(t) = -1.$$
Pour la première, le second membre est de la forme $t \mapsto e^{\omega t}$, avec $\omega = 1$ qui n'est pas slution de léquation caractérisique. Ainsi, on cherche z_{p_1} sous la forme
$$z_{p_1}(t) = \alpha e^t, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ à trouver}.$$
On injectant, z_{p_1} est solution si et seulement si :
$$z''_{p_1}(t) + z_{p_1}(t) = 6e^t \iff 2\alpha e^t = 6e^t \iff \alpha = 3.$$
Pour z_{p_2}, il est naturel de chercher une constante, et on voit que $z_{p_2} = -1$ est une solution particulière.
Par superposition, la fonction
$$z_p(t) = z_{p_1}(t) + z_{p_2}(t) = 3e^t - 1$$
est solution particulière de l'équation différentielle (2).

On utilise ensuite l'autre théorème de superposition : les solutions de (2) sont exactement les fonctions

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{3}e^t - 1, \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On revient finalement à la fonction dans la variable initiale en utilisant $y(x) = z(\ln x)$: les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions

$$y(x) = A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x) + \frac{1}{3}x - 1$$

Pour aller plus loin : On montre facilement que le principe de superposition reste vrai pour des équations différentielles linéaires quelconques. Par contre, il n'y a pas vraiment de méthode pour résoudre l'équation homogène. Le changement de variable utilisé ici est classique mais ne marche que sur certaines équations très spécifiques.