Feuille d'exercices 12
Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1 ●●○ **Systèmes 2×2 à paramètres** Résoudre le système suivant (on discutera selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 ●○○ **Systèmes 3×3** Résoudre les systèmes suivants (on donnera la nature géométrique des solutions)

1. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 2 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 3x + 8y + 2z = 10 \\ -5x - 13y - z = -17 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ 4x + 9y - 5z = 10 \end{cases}$

Exercice 3 ●○○ **Système 3×3 à paramètre** Discuter selon la valeur de $t \in \mathbb{R}$ les solutions du systèmes :

$$\begin{cases} (2+t)x + 2y - z = 0 \\ 2x + (t-1)y + 2z = 0 \\ -x + 2y + (2+t)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

Méthode : Le pivot, oui, mais pas tout de suite : commencer par évacuer le coefficient $(2+t)$ de (L_1) en permutant (L_1) et (L_3). Bien sûr, discuter dès que vous simplifiez par quelque chose qui dépend de t. Pensez à interpréter les résultats géométriquement.

Détails :

Notons $\mathcal{S}$ le système. On commencer par permuter L_1 et L_3, puis on fait un pivot :

$$\mathcal{S} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} -x + 2y + (2+t)z = 0 \\ 2x + (t-1)y + 2z = 0 \\ (2+t)x + 2y - z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (2+t)L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + 2y + (2+t)z & = 0 \\ (t+3)y + (2t+6)z & = 0 \\ (2t+6)y + ((2+t)^2 - 1)z & = 0 \end{cases}$$

Notons que $2t + 6 = 2(t+3)$, ainsi (on laisse les calculs du coeff en z de L_3 au lecteur) :

$$\mathcal{S} \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} -x + 2y + (2+t)z = 0 \\ (t+3)y + (2t+6)z = 0 \\ (t^2 - 9)z = 0 \end{cases}$$

A ce stade, la dernière ligne doit être analysée. Bien sûr, on peut dire $z = 0$ ou $t^2 - 9 = 0$, mais beaucoup d'élèves s'embourbent car un cas n'exclut pas l'autre... Notons déjà que $t^2 - 9 = 0 \iff t = 3$ ou $t = -3$. Distiguons plusieurs cas disjoints, en commençant par le plus facile :

- Si $t \neq -3$ et $t \neq 3$, on a $t^2 - 9 \neq 0$, et (L_3) fournit $z = 0$, puis en remontant le système, $y = z = 0$. On a donc une unique solution $(0, 0, 0)$.
- Si $t = 3$, alors on a

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} -x + 2y + 5z = 0 \\ 6y + 12z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

  Finalement, l'ensemble des solutions est $\{(z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$: c'est la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et de vecteur directeur $(1, -2, 1)$.
- Si $t = -3$, alors on a

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} -x + 2y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff -x + 2y + 5z = 0$$

  Finalement, l'ensemble des solutions est le plan d'équation $-x + 2y + 5z = 0$: c'est le plan passant par l'origine et de vecteur normal $(-1, 2, 5)$.

Exercice 4 ●○○ **Systèmes 4×3 dans $\mathbb{C}$** Résoudre le système suivant, dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + iy - 2z = -6 + 8i \\ -3x - y - z = 0 \\ ix - y + z = 3 - i \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Exercice 5 ●○○ — Matrices qui commutent Trouver l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 ●●○ — Deux visions des rotations Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On se donne deux réels θ et θ'.

1. Calculer $R_\theta R_{\theta'}$. Cette matrice est-elle égale à $R_{\theta'} R_\theta$?
2. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, en déduire R_θ^n.
3. Justifier que R_θ est inversible et donner son inverse.
4. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, donner $(R_\theta^{-1})^n$ (que l'on peut noter R_θ^{-n}).
5. Soit une colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = R_\theta X$, que l'on écrit $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Calculer x' et y' en fonction de x et y.
6. On considère la transformation complexe (c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) définie par $f : z \mapsto e^{i\theta} z$.
   a. Rappeler la nature de cette tranformation
   b. Si $z = x + iy$, on écrit $f(z) = x' + iy'$. Exprimer (x', y') en fonction de (x, y).
   c. Conclusion ?

Exercice 7 ●●○ — Une décomposition déjà vue...

1. Soit $N = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer à la main deux matrices $S \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ tels que $N = S + A$.
2. a. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tels que $M = S + A$. On raisonnera par analyse-synthèse afin d'exprimer ces deux matrices en fonction de M.
   b. Montrer l'unicité de ces deux matrices.

Exercice 8 ●●○ — Une équation matricielle Déterminer les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $A^2 = A$.

Exercice 9 ●○○ — Systèmes 3×3 à paramètres Discuter en fonction des paramètres (m, p, q) de la compatibilité du système suivant, et le cas échéant, le résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y - z = m \\ 2x - 3y + z = p \\ x + 9y - 4z = q \end{cases}$$

Exercice 10 ●●○ — Systèmes 4×4 On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ x - 3y - 8z - t = -4 \\ 3x - y - 4z + 5t = -2 \\ 5x - 3y - 10z + 7t = -5 \end{cases}.$$

Mettre le système sous forme matricielle. Appliquer l'algorithme du pivot afin d'obtenir un système triangulaire (échelonné). Le résoudre.

Exercice 11 ●●○ — Système de 3 équations à 4 inconnues On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - z + t = 2 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + 3z = 9 \end{cases}.$$

Mettre le système sous forme matricielle. Appliquer l'algorithme du pivot afin d'obtenir un système triangulaire (échelonné). Le résoudre.

Exercice 12 ●●○ — Système à paramètre Résoudre en fonction de m :

1. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \\ m^2 x + my + z = 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x + 3y = -2m \\ -3x - 4y = 1 \\ mx + y = 1 \\ -4x - 5my = 0 \end{cases}$

Exercice 13 ●●● — Un système de taille n Soient a et b deux réels. considérons le système

$$\begin{cases} ax_1 + b = x_2 \\ ax_2 + b = x_3 \\ \quad \vdots \\ ax_n + b = x_1 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice associée au système.
2. Résoudre le système avec l'algorithme de Gauss (on appliquera les opérations sur la matrice du système pour y voir plus clair).

Exercice 14 ●●○ — Géométrie et systèmes (En attendant le S2)

1. Les points $A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?
2. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, d'équations respectives $2x+3y-z+5=0$ et $7x-y+z=4$ ont-ils une intersection non vide ? Le cas échéant, la déterminer.

Exercice 15 ●○○ — Interpolation manuelle

Trouver un polynôme de degré 2 qui vérifie :

$$P(-2) = -63 \quad P(4) = -39 \quad \text{et} \quad P(10) = 57.$$

Correction :

Méthode :

Il faut mettre le problème en forme, en introduisant des coefficients de P.

Détails :

Cherchons une solution P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. On a alors

$$\begin{cases} P(-2) = -63 \\ P(4) = -39 \\ P(10) = 57 \end{cases} \iff \begin{cases} (-2)^2a - 2b + c = -63 \\ 4^2a + 4b + c = -39 \\ 10^2a + +10b + c = 57 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a - 2b + c = 63 \\ 16a + 4b + c = 63 \\ 100a + 10b + c = 57 \end{cases}.$$

Il reste à résoudre par pivot. Calculette autorisée !

Pour aller plus loin : Faire passer une courbe par des points donnés s'appelle de « l'interpolation ». Dans notre cas, on intuite facilement que par trois points non alignés passe une unique parabole, c'est-à-dire un unique polynôme de degré 2. Bien sûr, la méthode idéale pour trouver ce polynôme n'est pas la recherche des coefficients : on étudiera bientôt les « polynômes de Lagrange » qui permettent de résoudre le problème de faire passer un polynôme de degré n par $n+1$ points fixés.

Exercice 16 ●●○ — Calcul de puissances : avec de l'aide

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\6 & -5 & 6\\3 & -3 & 4\end{pmatrix}$. Cherchez une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n\\ u_n & -u_n & 1+u_n\end{pmatrix}.$$

En déduire une expression explicite de A^n.

Exercice 17 ●●○ — Calcul de puissances : avec une décomposition classique

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

1. Ecrire A sous la forme $\alpha I_3 + N$, où N est une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 0.
2. Calculer les puissances de N.
3. En déduire les puissances de A.

Exercice 18 ●●● — Calcul de puissances : avec une décomposition moins classique

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Ecrire A sous la forme $\alpha I_3 + B$, où B est une matrice dont tous les coefficients sont égaux.
2. Calculer les puissances de B (commencer par relier B^2 et B).
3. En déduire les puissances de A.

Correction :

Méthode :

1. Si on ne "voit" pas α et B, on peut poser $B = \begin{pmatrix}b & b & b\\b & b & b\\b & b & b\end{pmatrix}$.
2. Calculer B^2. Une fois le résultat intuité, il faut parler de récurrence !
3. Utiliser le binôme de Newton. N'oubliez pas de justifier son usage, qui n'est pas systématique pour des matrices.

Détails :

1. Si on suit la méthode proposée, on trouve $\alpha + b = 2$ et $b = 1$ donc

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Un calcul direct donne

$$B^2 = \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\end{pmatrix} = 3B.$$

Une telle relation doit vous faire penser à une suite géométrique de raison 3, on intuite donc la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \geqslant B^n = 3^{n-1}B.$$

Cette formule se montre par une récurrence directe.

3. On a donc
$$A^n = (I_3 + B)^n.$$
Puisque les matrices I_3 et B commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} B.$$
Notez que l'on a traité séparément le terme $k = 0$, pour lequel B^k vaut I_3 et non pas la formule trouvée à la question 2. Il reste à calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$. Cela ressemble fort au binôme de Newton, mais il manque le premier terme, et la puissance de 3 est décalée. On arrange cela :
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) = \frac{1}{3} \left((3+1)^n - 1 \right) = \frac{1}{3}(4^n - 1).$$
En conclusion,
$$A^n = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)B = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n-1) \\ \frac{1}{3}(4^n-1) & 1 + \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n-1) \\ \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n-1) & 1 + \frac{1}{3}(4^n-1) \end{pmatrix}.$$
Pour aller plus loin : Cette méthode se généralise facilement pour calculer une puissance de la forme $(\alpha I_3 + bB)^n$ avec α et b quelconques. On peut même envisager le calcul pour des matrices carrées de tailles $m \in \mathbb{N}^*$, la différence étant le calcul de B^n (avec $B \in M_m(\mathbb{R})$ la matrice constituée de 1 partout) :
$$\forall n \geqslant 1, \quad B^n = m^{n-1} B.$$

Exercice 19 ●●● — Calcul de puissances : à l'intuition

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer quelques puissances de A, puis pour $n \in \mathbb{N}$, conjecturer une formule pour A^n. Démontrer votre conjecture.

Exercice 20 ●○○ — Inverses de matrice diagonales (vu en cours)

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2. Généraliser au cas d'une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 ●●○ — Inverses de matrice triangulaire

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2. Que pouvez-vous généraliser au cas d'une matrice triangulaire de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22 ●●○ — Calculer l'inverse d'une matrice (exo essentiel)

Nous présentons plusieurs méthodes (qui se valent) pour trouver l'inverse d'une matrice A donnée. Dans tous les cas, il faut éviter de chercher manuellement les coefficients d'une matrice B qui vérifie $AB = I_n$.

Soit donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (L'anti-méthode). Si on cherche les coefficients de $B \in M_3$ qui vérifieraient $AB = I_3$, on obtient un système sur ses coefficients. Combien a-t-on d'équations et d'inconnues ? Avez-vous envie de vous lancer ?

2. (L'inverse comme solution d'un système).

a. Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une colonne. Résoudre le système $AX = B$ d'inconnue la colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en fonction de (a, b, c).

b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

3. (En augmentant avec l'identité). Augmenter la matricer avec la matrice I_3, puis appliquer un algorithme pour transformer la matrice A en I_3, en répercutant ces transformations sur la matrice I_3. Conclure.

Exercice 23 ●●○ — Un outil pour les suites récurrentes linéaires

On considère la suite récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :
$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 = 1 \ \text{ et } \ u_1 = 2 \end{cases}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Rappeler la méthode vue dans le chapitre sur les suites et donner l'expression générale de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Le but dans les questions suivantes est de retrouver l'expression de (u_n) par un calcul de puissance de matrice. En particulier, on évitera de se servir de la **question 1**.

a. Ecrire X_{n+1} en fonction de u_n et u_{n+1}, puis déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b. En déduire X_n en fonction de A^n et X_0.

c. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+1}\cos(\frac{n+1}{4}\pi) & \sqrt{2}^n \sin(\frac{n}{4}\pi) \\ \sqrt{2}^{n+2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+1}\sin(\frac{n+1}{4}\pi) \end{pmatrix}.$$

On pourra montrer que $\cos(\frac{n+3}{4}\pi) = -\sin(\frac{n+1}{4}\pi)$, et utiliser les formules d'addition .

d. Retrouver l'expression explicite de (u_n).

Exercice 24 ●●○ — Et pour un système de suites ? On considère 3 suites récurrentes définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \\ x_0 = 10, \ y_0 = 15 \ \text{ et } \ z_0 = 20 \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Mettre le système sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, où $A \in M_3(\mathbb{R})$ est à déterminer.

2. En vous inspirant des exercices précédents, trouver l'expression générale des suites.

Correction :

1. Par "lecture" du système, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on a bien

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la relation recherchée.

2. La relation de récurrence $X_{n+1} = AX_x$ fait penser aux suites géométriques réelles. En effet, par récurrence directe,n on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

3. On écrit

$$A = 3I_3 + N, \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule les puissances de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \ \forall k \geqslant 3, N^k = 0.$$

On a $3I_3 \times N = N \times 3I_3$, donc les deux matrices $3I_3$ et N commutent. On peut appliquer le binôme de Newton : on a pour $n \geqslant 2$:

$$(3I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k.$$

Or $N^k = 0$ si $k \geqslant 3$, ainsi on a

$$\begin{aligned}(3I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k &= 3^n N^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} N + \binom{n}{2} 3^{n-2} N^2 \\ &= 3^n I_3 + n3^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} & n(n-1) \times 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n \times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalement, avec la formule $X_n = A^n X_0$, on obtient

$$\begin{cases} x_n = 3^n x_0 + 2n \times 3^{n-1} y_0 + n(n-1)3^{n-2} z_0 \\ y_n = 3^n y_0 + n \times 3^{n-1} z_0 \\ z_n = 3^n z_0 = 20 \times 3^n \ \ \text{(cohérent car cette suite est géométrique)} \end{cases}$$

soit avec les valeurs de (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{cases} x_n = 10 \times 3^n + 30n \times 3^{n-1} + 20n(n-1) \times 3^{n-2} \\ y_n = 15 \times 3^n + 20n \times 3^{n-1} \\ z_n = 20 \times 3^n \end{cases}$$

Exercice 25 ●●○ — Inverse d'une matrice 2×2 à paramètre Ecrire la matrice associée au système de l'exercice 1. Pour quelle valeur de m est-elle inversible ? Donner son inverse le cas échéant.