Feuille d'exercices 13
Analyse asymptotique : relation de comparaison et DL

Exercice 1 ●○○ Trouver des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1+\sin x)$ en 0. **2.** $x \mapsto \text{Arctan}(1+x) - \frac{\pi}{4}$ en 0.

Exercice 2 ●●○

1. Déterminer un équivalent simple de $x \mapsto x^{1/x} - 1$ en $+\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de $x \mapsto x^{x^{1/x}} - x$ en $+\infty$.
3. Etudier la limite de $x \mapsto \dfrac{(x+1)^{1/x} - x^{1/x}(x\ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$ en $+\infty$.

Exercice 3 ●●○

1. Montrer que $\ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$.
2. En déduire la limite de $x \mapsto \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$ en $+\infty$.

Exercice 4 ●●○ **Des DL** Donner les DL en a des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x+2x^2}$, en $a=0$, à l'ordre $n=5$.
2. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, en $a=1$, à l'ordre $n=4$.
3. $x \mapsto e^{\sin x}$, en $a=0$, à l'ordre $n=4$.

Exercice 5 ●●○ **Calcul de limites** Calculer les limites suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \ln(1+x)\left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}\right)$. **2.** $x \mapsto \frac{\text{Arctan}\, x - \sin x}{\ln(1+x^3)}$. **3.** $x \mapsto \frac{e^{-x^2}-1}{\sin^2 x}$.

Exercice 6 ●●○ **Primitiver un DL** Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x+1)$.

1. Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de f'.
2. En déduire celui à l'ordre 4 en 0 de f.

Exercice 7 ●○○ **Position relative à la tangente** Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

1. Déterminer le DL de f à l'ordre 3 en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
3. Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 8 ●●○ **Un prolongement par continuité et une tangente.** Soit $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Quelle est la régularité de f sur cet ensemble ?
2. Déterminer le DL au voisinage de 1 de f à l'ordre 3.
3. En déduire que f peut être prolongée par continuité en 1, et que ce prolongement est dérivable.
4. Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 1.

Exercice 9 ●●○ **Une asymptote oblique.** Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

1. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
2. Montrer que f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et préciser sa position relative par rapport à la courbe de f.

Exercice 10 ●●○ **Approcher des dérivées : les différences finies.** Soit $f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$.
2. Pour h petit, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ vous paraît-elle être une meilleure approximation du nombre dérivée que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$? Donner une application en cinématique.
3. Déterminer $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Quelle application en cinématique ?
4. En quoi la formule précédente permet d'approcher numériquement des équations différentielles d'ordre 2 ? (faites un lien avec la méhode d'Euler).

Exercice 11 ●●○ — Aller plus loin pour la tangente

1. Retrouver le DL à l'ordre 3 de la fonction tan en 0.

2. En utilisant un lien entre $\tan'$ et $\tan^2$, en déduire le DL de tan à l'ordre 5.

Exercice 12 ●●● — Profiter d'une équadiff Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^x \cos x$

1. Calculer f' et f''.

2. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, à savoir

$$y'' + by' + cy = 0$$

où b et c sont à préciser.

3. Fixer des conditions initiales en 0 de sorte à avoir un problème de Cauchy dont f est la solution. Y a-t-il d'autres solutions ?

4. En déduire les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![2,6]\!]$, puis le DL à l'ordre 6 de f en 0.

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = f^{(k)}(0)$. Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire sa valeur explicite.

6. En déduire le DL à tout ordre de f en 0. Avec quelle autre méthode aurait-on pu calculer $f^{(k)}(0)$?

Exercice 13 ●○○ — Equivalents de suites Déterminer un équivalent des suites suivantes en $+\infty$ (les **3** et **5** sont plus durs).

1. $u_n = n \sin \frac{1}{n^3}$. **2.** $u_n = \ln(\frac{n-1}{n})$. **3.** $\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right)^n$

4. $u_n = \frac{n - \ln n + \frac{4}{n}}{e^n - n^2}$. **5.** $u_n = \left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right)^n$. **6.** $u_n = \binom{n}{p}$, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé.

Exercice 14 ●●● — Développement d'une suite implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation

$$x^3 + nx - 1 = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

3. Montrer que

$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}.$$

En déduire que, lorsque $n \to +\infty$:

$$u_n - \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n^4}).$$

4. (Pour aller plus loin). On pose $y_n = u_n - \frac{1}{n}$.

(i) Substituer u_n par $y_n + \frac{1}{n}$ dans l'équation définissant u_n.

(ii) Montrer que $y_n = -\frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^6})$.

(iii) En déduire un développement asymptotique à deux termes de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 15 ●●○ — DL et dérivabilité On a vu que

- f est continue en a si et seulement si elle y admet un DL à l'ordre 0 (sa limite).
- f est dérivable en a si et seulement si elle y admet un DL à l'ordre 1.

On va observer que ceci n'est plus vrai aux ordre supérieurs.

1. Quel résultat du cours affirme qu'une fonction n fois dérivable en a y admet un DL à l'ordre n ?

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(i) La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

(ii) Admet-elle un DL d'ordre 2 en 0 ?