Feuille d'exercices 15
Géométrie plane

Sauf mention contraire, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé fixé.

Exercice 1 ●○○ — Calculs de base Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $[\vec{u}, \vec{v}]$ dans les cas suivants :

1. $\vec{u} = (3, -1)$ et $\vec{v} = (2, 4)$.
2. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 ●○○ — Avec le projeté Construire un triangle ABC tel que

1. $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$.
2. $AB = 4$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$.

Exercice 3 ●●○ — Utiliser le bon outil Soient $A = (4, 1)$ et $B = (7, -1)$. Pour chacun des cas suivants, décrire à la fois géométriquement et analytiquement (c'est-à-dire par une équation) l'ensemble des points $M = (x, y)$ qui vérifient

1. ABM est un triangle rectangle en M.
2. ABM est un triangle rectangle direct en M.
3. ABM est un triangle rectangle en B.

Exercice 4 ●●○ — Mesure arrondie Soient $A = (3, 2)$ et $B = (0, 5)$ et $C = (-2, -1)$. Donner une valeur arrondie au degré des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 5 ●●○ — Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer AB et AC.

Exercice 6 ●●○ — Fomules de Héron Soit ABC un triangle. On note a, b et c ses côtés, ainsi que α une mesure de l'angle opposé au côté de longueur a.

1. Exprimer $\cos\alpha$ en fonction de a, b et c.
2. En déduire $\sin^2\alpha$.
3. En déduire l'aire du triangle en fonction de a, b et c.
4. On note p le demi-périmètre du triangle ABC. Ecrire l'aire du triangle en fonction de p, et des longueurs des côtés.

Correction :

1. C'est la formue d'Al Kashi, ou loi des cosinus. On part de $a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$, on applique Chasle et on développe. Après calculs :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
On vérifie bien le théorème de Pythagore au passage.
2. On a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{2bc})^2 = \frac{4b^2c^2-(c^2+b^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$.
3. En uilisant le produit mixte, l'aire $\mathcal{A}$ est donnée par
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha),$$
avec la convention que $\alpha \in [0, \pi]$ de sorte que $\sin\alpha \geqslant 0$. Ainsi avec la question précédente :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}.$$
4. On simplifie l'expression précédente à coups d'identités remarquables. Après calculs, on trouve
$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$
Cette formule est appelée formule de Héron, elle donne l'aire d'un triangle uniquement à partir des longueurs des côtés. Elle permet entre autre de montrer qu'à périmètre pixé, on optimise l'aire d'un triangle en le choisissant équilatéral : c'est l'inégalité isopérimétrique pour le triangle.

Exercice 7 ●●○ — Des cordes particulières Soit $ABCD$ un carré, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Que dire de (AJ) et (ID) ?

Correction : Un dessin nous laisse penser que ces droites sont perpendiculaires. On calcule le produit scalaire$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{ID}$. Pour aller vite, on peut exprimer les vecteurs dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Exercice 8 ●○○ **Couper un triangle en 3** Soit ABC un triangle. On note, G le centre de gravité, c'est à dire le point qui vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que l'aire d'un triangle est donné par $\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
3. En déduire que l'aire du triangle ABG vaut un tiers de celle du triangle ABC.
4. En déduire que le point G « sépare » le triangle ABC en trois triangles de même aire.

Exercice 9 ●●● **Droite d'Euler** Soit ABC un triangle non rectangle. On note H son othocentre (l'intersection de ses hauteurs), G le centre de gravité (lintersection des médianes), et O le centre du cercle circonscrit. Notez que les existences de H et de G sont non triviales, et nous avons montré l'existence de H avec les nombres complexes.

Soit
$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}.$$

1. Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que
$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB}.$$
2. En déduire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
3. Démontrer de même que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
4. En déduire que $\vec{u} = 0$ puis que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
5. Que conclure sur O, H et G ?

Exercice 10 ●○○ **La loi des sinus** Soit ABC un triangle d'aire S. On note $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles associés aux trois sommets, et a, b, et c les longueurs des côtés opposés à ces angles.

1. Montrer que $S = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.
2. En déduire la loi des sinus :
$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

Exercice 11 ●●○ **Propriétés de la médiane**

1. Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. Démontrer les trois théorèmes de la médiane :
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2,$$
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA},$$
et
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2,$$
2. Démontrer que dans un triangle, la somme des carrées des longueurs des médianes est égale aux trois quarts de la somme des carrés des longueurs des côtés.
3. Démontrer qu'un triangle est équilatéral si et seulement si les médianes ont même longueur.
4. Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.
   - **(i)** Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 20$.
   - **(ii)** Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ où $k = -10$, puis $k = -4, 21$. Généraliser en fonction de $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 ●●○ **Triangle, equations de droite et cercle** Soit ABC un triangle tel que $A = (6, -3)$, $B = (2, -1)$ et $C = (0, 5)$

1. Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de C.
3. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$, puis de celle du segment $[AC]$.
4. Comparer les résultats des deux questions précédentes.
5. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.
6. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle passant par C.

Exercice 13 ●○○ **Equations de cercle** Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}$. Montrer que l'origine appartient à $\mathscr{C}$.
2. Montrer que l'intersection entre $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est donnée par l'origine et un point A que l'on déterminera.

3. Montrer de même l'existence de B, la deuxième intersection entre $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées, et de D, celle entre $\mathscr{C}$ et la bissectrice $y = x$. Donnez les coordonnées de ces points.
4. Soient $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les cercles respectis de diamètre $[OA]$, $[OB]$ et $[OD]$. Démontrez que, outre l'origine, ces trois cercles s'intersectent deux à deux en trois points notés I_1, I_2 et I_3 dont on déterminera les coordonnées.
5. Montrer que les trois points I_1, I_2 et I_3 sont alignés.

Exercice 14 ●●○ — Distance d'un point à un cercle Soient $A = (2, -3)$, $B = (-4, 5)$, $C = (11, 7)$ et $D = (4, 7, -7\sqrt{3})$ quatre points du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer $d(C, (AB))$.
3. Existe un point M qui réalise le minimum de la distance entre la droite (CD) et le cercle $\mathscr{C}$? Le déterminer le cas échéant, et proposer une solution géométrique.