Feuille d'exercices 15
Polynômes

Exercice 1 ●○○ **Equations sur des polynômes** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
2. $(P')^2 = 4P$.

Idée : commencez par considérer le degré d'une solution P.

Exercice 2 ●○○ **Interpolation et contraintes** Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que

$$P(2) = 5, \quad P'(2) = 6, \quad P''(2) = -8, \quad P^{(3)}(2) = -18, \quad \text{et} \quad P(3) = 4.$$

Idée : On connait P, ansi que ses dérivées, au point 2. Quelle formule fait intervenir ces quantités ?

Exercice 3 ●●○ **Une équation de polynôme** Soit $n \in \mathbb{N}$, existe-t-il un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$. Si oui, les déterminer.

Exercice 4 ●●○ **Factorisation(s)**

Factoriser $(X^2-3X+2)^2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Idée : Dans $\mathbb{C}$, vous savez factoriser a^2+b^2.

Exercice 5 ●●○ **Divisions euclidiennes**

Effectuer les divisions de A par B dans les cas suivants :

1. **a.** $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
   b. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
2. Donner le reste, et le quotient sous forme d'une somme :
   a. $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$ (avec $n \geqslant 2$).
   b. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$ (avec $n \geqslant 2$). On pourra utiliser le binôme ou bien une formule de Taylor-Young.
   c. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$ (avec $n \geqslant 3$). On pourra utiliser la formule de Taylor.

Exercice 6 ●●○ **Critère de divisibilité**

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur a et b pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.
Idée : On peut calculer le reste dans la division euclidienne par $(X-1)^2$.

Exercice 7 ●●● **Encore un critère de divisibilité**

Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.
Idée : On peut penser au complexe j, qui vérifie $j^3 = 1$ (entre autre).

Exercice 8 ●●○ **Polynômes interpolateurs de Lagrange**

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n+1$-uplet de nombres deux à deux distincts. On définit pour $i \in [\![0\,,n]\!]$:

$$L_i = \frac{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

1. Déterminer, pour chaque $(i, i_0) \in [\![0\,,n]\!]^2$, ce que vaut $L_i(a_{i_0})$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

On pourra comparer ces deux polynômes sur les $n+1$ points $(a_0, \dots, a_n)$.

Exercice 9 ●●○ **Polynômes de Tchebychev**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme P_n qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos nx = P_n(\cos x),$$

et l'étudier.

1. Proposer trois polynômes P_0, P_1 et P_2, solutions du problème pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$.
2. Soit R_n un autre polynôme solution.
   a. Montrer que
   $$\forall t \in [-1,1], \quad P_n(t) = R_n(t).$$
   On pourra écrire $t = \cos(\operatorname{Arccos} t)$.
   b. En déduire que si P_n existe, il est unique.

   Remarque : Ces deux questions ont des solutions très courtes. Vous avez pour contrainte de proposer une réponse courte (ou de passer votre tour).
3. Pour $n \geqslant 1$, développer $\cos((n+1)x)$ et $\cos((n-1)x)$. En déduire une relation entre $\cos((n-1)x)$, $\cos nx$ et $\cos((n+1)x)$.
4. Montrer par une récurrence forte que P_n existe et vérifie
   $$\forall n \geqslant 1, \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$
5. En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.
6. En étudiant l'équation $\cos(nx) = 0$, d'inconnue $x \in [0,\pi]$, donner l'ensemble des racines de P_n et le factoriser. Est-il scindé ?

Exercice 10 ●●○ — Un polynôme déjà vu

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$
Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Idée : Que dire de P_n' ?

Exercice 11 ●○○ — Lever une indetermination

Soit la fonction polynomiale $P(x) = 2x^5 - 15x^4 + 28x^3 - 14x^2 - 6x + 5$. Déterminer $\lim_{x\to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2}$.

Exercice 12 ●●○ — Décomposition

Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irreductibles :
1. $X^5 - X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. $\sum_{k=0}^{7} X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
4. $X^5 - 8X^4 + 9X^3 + 58X^2 - 164X + 120$ dans $\mathbb{R}[X]$ (calculer $P(2)$, $P'(2)$, voire...).
5. $X^5 + 2X^4 - X^3 - 8X^2 - 10X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 ●○○ — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, et
$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$
1. Montrer que 1 est racine de P et préciser l'ordre de cette racine.
2. Donner un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que P est divisible par $(X-1)^m$ mais pas par $(X-1)^{m+1}$.

Exercice 14 ●●○ — Encore un critère de divisibilité

Soient a, b et c trois réels, et
$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 15$$
1. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P.
2. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P, et que P n'admette pas de racine réelle.

Exercice 15 ●●● — Polynômes et racines de l'unité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = (1+X)^n - (1-X)^n$.
1. Calculer P_n pour $n \in [\![1\,,4]\!]$.
2. Déterminer le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré).
3. P_n est-il divisible par X ?
4. **a.** Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si
   $$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1.$$
   b. résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ (discuter selon la parité de n).
   c. Décomposer P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 ●●○ — Polynome annulateur et puissances d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Déterminer, pour $n \geqslant 3$, le reste de la division euclidienne de X^n par P. On écrira le résultat sous la forme $a_nX + b_n$, avec a_n et b_n à expliciter.
3. Calculer A^n en utilisant la division euclidienne.

Exercice 17 ●●○ — Décomposition en éléments simples

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. **a.** $F(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$. **b.** $F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

2. Même question, sur $\mathbb{C}$:

   a. $F(X) = \frac{2X}{X^2+1}$. **b.** $F(X) = \frac{1}{X^2+X+1}$.

3. $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).

4. $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$ sur $\mathbb{R}$ (à chercher sous la forme $\frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$).

5. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le dénominateur et s'inspirer de ce qui précède).