Feuille d'exercices 15
Polynômes

Exercice 1 ●○○ **Equations sur des polynômes** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
2. $(P')^2 = 4P$.

Idée : commencez par considérer le degré d'une solution P.

Exercice 2 ●○○ **Interpolation et contraintes** Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que

$$P(2) = 5, \quad P'(2) = 6, \quad P''(2) = -8, \quad P^{(3)}(2) = -18, \quad \text{et} \quad P(3) = 4.$$

Idée : On connait P, ansi que ses dérivées, au point 2. Quelle formule fait intervenir ces quantités ?

Correction :
Détails :
On écrit la formule de Taylor pour P en 2, à l'ordre 3. Comme P est de degré au plus 3, on sait que le reste de la formule de Taylor est nul :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k = P(2) + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2 + \frac{P'''(2)}{6}(X-2)^3$$

Ainsi, si un tel polynôme existe, alors nécessairement :

$$\begin{aligned} P(X) &= 5 + 6(X-2) - \frac{8}{2}(X-2)^2 - \frac{18}{6}(X-2)^3 \\ &= 5 + 6(X-2) - 4(X-2)^2 - 3(X-2)^3 \end{aligned}$$

On vérifie que la conditon $P(3) = 4$ est bien vérifiée par ce polynôme. Ainsi, il y a bien un polynôme qui vérifie ces contraines, et il est unique.

Remarque : on n'a pas besoin d'expliciter les coefficients de P. En fait, on a donné ses coefficients (coordonnées) dans la base de polynômes échelonnés

$$(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3).$$

On peut retenir que la formule de Taylor permet d'écrire un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base "translatée" $(1, (X-\lambda), \dots, (X-\lambda)^n)$, et que les coefficients se trouvent à partir des dérivées en λ.

Exercice 3 ●●○ **Une équation de polynôme** Soit $n \in \mathbb{N}$, existe-t-il un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$. Si oui, les déterminer.

Exercice 4 ●●○ **Factorisation(s)**
Factoriser $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Idée : Dans $\mathbb{C}$, vous savez factoriser $a^2 + b^2$.

Exercice 5 ●●○ **Divisions euclidiennes**
Effectuer les divisions de A par B dans les cas suivants :

1. **a.** $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
   b. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
2. Donner le reste, et le quotient sous forme d'une somme :
   a. $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$ (avec $n \geqslant 2$).
   b. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$ (avec $n \geqslant 2$). On pourra utiliser le binôme ou bien une formule de Taylor-Young.
   c. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$ (avec $n \geqslant 3$). On pourra utiliser la formule de Taylor.

Correction :
Détails :

1. **a.** $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
   b. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
2.
3. On cherche $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$X^n = (X^2 - 1)Q + R,$$

et donc R sous la forme $aX + b$, avec a et b à trouver.
Si on ne voit pas la méthode astucieuse, on peut calculer le reste en évaluant en les racines 1 et 1 du diviseur. C'est pénible, et cela ne donne pas Q... mais on voit que le reste vaut 1 ou X, selon la parité de n (on peut aussi le voir en s'échauffant sur des petites valeurs de n). On a alors l'idée d'un balayeur :

- Si n est pair, on écrit $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$X^n = X^{2p} = X^{2p} - 1 + 1 = (X^2)^p - 1 + 1 = (X^2 - 1) \times \sum_{k=0}^{p-1} (X^2)^k + 1.$$

Ainsi on a

$$Q = \sum_{k=0}^{p-1} X^{2k} \quad \text{et} \quad R = 1.$$

- Si n est pair, on écrit $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, et on sert de ce qui précède :

$$X^n = X^{2p+1} = (X^2 - 1) \times X \times \sum_{k=0}^{p-1} X^{2k} + X.$$

Ainsi on a

$$Q = \sum_{k=0}^{p-1} X^{2k+1} \quad \text{et} \quad R = 1.$$

a. Dans l'idée de l'exercice précédent, on fait apparaître le diviseur, puis on applique le bnôme :

$$X^n = (X - 1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X - 1)^k.$$

Les deux premiers termes donnent le reste, dans les suivants on factorise par $(X - 1)^2$ et on change d'indice :

$$X^n = \underbrace{1 + n(X - 1)}_{\text{Reste}} + \underbrace{(X - 1)^2 \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n}{p+2} (X - 1)^p}_{\text{Quotient}}.$$

b. La formule de Taylor en 1 est tout indiquée ici : puisque $\deg(A) = n + 1$, on a

$$A = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k = \underbrace{A(1) + (X - 1)A'(1)}_{\text{Reste}} + \underbrace{(X-1)^2 \sum_{p=0}^{n-1} \frac{A^{(p+2)(1)}}{p!} (X - 1)^p}_{\text{Quotient}}$$

Or on a

$$A(1) = 0 \quad \text{et} \quad A'(1) = 0,$$

et donc le reste vaut $R = 0$. On peut transformer un peu le quotient Q avec des formules de coefficients binomiaux.

Exercice 6 ••○ — Critère de divisibilité

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur a et b pour que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Idée : On peut calculer le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^2$.

Exercice 7 ••• — Encore un critère de divisibilité

Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Idée : On peut penser au complexe j, qui vérifie $j^3 = 1$ (entre autre).

Correction : On effectue la division euclidienne de $A = X^{2n} + X^n + 1$ par $B = X^2 + X + 1$, en vue de calculer le reste : il existe deux polynômes Q et R tels que

$$X^{2n} + X^n + 1 = (X^2 + X + 1)Q + R$$

avec $\deg R \leqslant 1$, c'est-à-dire $R = aX + b$ où a et b sont deux constantes à trouver.

Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 (qui vaut $\overline{j}$), avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On évalue en ces racines :

$$\begin{cases} aj + b = j^{2n} + j^n + 1 \\ aj^2 + b = j^{4n} + j^{2n} + 1 \end{cases}$$

Or $j^4 = j \times j^3 = j$ et donc $j^{4n} = (j^4)^n = j^n$, d'où

$$j^{4n} + j^{2n} + 1 = j^{2n} + j^n + 1.$$

Ainsi on a

$$aj + b = aj^2 + b \iff a(j - j^2) = 0 \iff a = 0.$$

On a finalement $b = j^{2n} + j^n + 1$, que l'on doit calculer. Puisque $j^3 = 1$, c'est la congruence de n modulo 3 qui va jouer un rôle. On écrit

$$n = 3p + r \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{0, 1, 2\}.$$

On a alors $j^{3p} = (j^3)^p = 1$, et donc

$$j^n = j^{3p+r} = j^r \text{ et } j^{2n} = j^{6p+2r} = j^{2r}.$$

On a la disjonction de cas suivante :

- Si $r = 0$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = 3$. Donc le reste R vaut 3 et est non nul.
- Si $r = 1$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = j^2 + j + 1 = 0$. Donc le reste R est nul.
- Si $r = 1$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$. Donc le reste R est nul.

En conclusion, $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$ si et seulement si 3 ne divise par n.

Remarque : La preuve et le critère sont les mêmes que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors autant utiliser les complexes !

Exercice 8 ●●○ — Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n+1$-uplet de nombres deux à deux distincts. On définit pour $i \in [\![0\,, n]\!]$:

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

1. Déterminer, pour chaque $(i, i_0) \in [\![0\,, n]\!]^2$, ce que vaut $L_i(a_{i_0})$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

On pourra comparer ces deux polynômes sur les $n+1$ points $(a_0, \dots, a_n)$.

Exercice 9 ●●○ — Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme P_n qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos nx = P_n(\cos x),$$

et l'étudier.

1. Proposer trois polynômes P_0, P_1 et P_2, solutions du problème pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soit R_n un autre polynôme solution.
   a. Montrer que
   $$\forall t \in [-1, 1], \quad P_n(t) = R_n(t).$$
   On pourra écrire $t = \cos(\operatorname{Arccos} t)$.
   b. En déduire que si P_n existe, il est unique.

   Remarque : Ces deux questions ont des solutions très courtes. Vous avez pour contrainte de proposer une réponse courte (ou de passer votre tour).
3. Pour $n \geqslant 1$, développer $\cos((n+1)x)$ et $\cos((n-1)x)$. En déduire une relation entre $\cos((n-1)x)$, $\cos nx$ et $\cos((n+1)x)$.
4. Montrer par une récurrence forte que P_n existe et vérifie
$$\forall n \geqslant 1, \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$
5. En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.
6. En étudiant l'équation $\cos(nx) = 0$, d'inconnue $x \in [0, \pi]$, donner l'ensemble des racines de P_n et le factoriser. Est-il scindé ?

Exercice 10 ●●○ — Un polynôme déjà vu

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Idée : Que dire de P_n' ?

Correction : On constate que $\deg(P_n) = n$. Ainsi, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P_n a n racines complexes comptées avec multiplicités. Afin de voir si elles sont simples, on calcule P_n'. On a

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On effectue un glissement d'indice :

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1} = P_n - X^n.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité $m \geqslant 2$ de P_n, on a

$$P_n(\alpha) = 0 \ \text{ et } \ P_n'(\alpha) = 0,$$

ce qui est absurde si on évalue l'identité précédente en α. Ainsi toutes les racines sont simples et P_n est scindé à racines simples.

Exercice 11 ●○○ — Lever une indetermination

Soit la fonction polynomiale $P(x) = 2x^5 - 15x^4 + 28x^3 - 14x^2 - 6x + 5$. Déterminer $\lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2}$.

Correction : C'est bien sûr une forme indeterminée. Voyons la multiplicité de la racine 1 en calculant les dérivées en 1, et au passage le DL en 1 avec la formule de Taylor.

On a $P(1) = 0$, et $P'(x) = 10x^4 - 60x^3 + 84x^2 - 28x - 6$, donc $P'(1) = 92 - 92 = 0$. Continuons : $P''(x) = 40x^3 - 180x^2 + 168x - 28$ et donc $P''(1) = 0$.

On peut s'arrêter là : 1 est racine de multiplicité au moins 3, et on peut écrire la formule de Taylor, lorsque $x \to 1$ à l'ordre 2 (tous les termes sont nuls) :

$$P(x) = o((x-1)^2) \ \text{ et donc } \ \lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2} = 0.$$

Exercice 12 ●●○ Décomposition

Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irreductibles :

1. $X^5 - X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. $\sum_{k=0}^{7} X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
4. $X^5 - 8X^4 + 9X^3 + 58X^2 - 164X + 120$ dans $\mathbb{R}[X]$ (calculer $P(2)$, $P'(2)$, voire...).
5. $X^5 + 2X^4 - X^3 - 8X^2 - 10X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Correction :

1. La décomposition est facile sur $\mathbb{R}$, avec des identités remarquables : on a sur $\mathbb{R}[X]$
$$X^5 - X = X(X^4 - 1) = X(X^2 - 1)(X^2 + 1) = X(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1).$$
On s'arrête là, car $X^2 = 1$ est bien sûr irréductible sur $\mathbb{R}$. par contre, sur $\mathbb{C}$, on a
$$X^5 - X = X(X^4 - 1) = X(X^2 - 1)(X^2 + 1) = X(X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i).$$
2. La décomposition n'est pas clair sur $\mathbb{R}$ (on sait qu'elle existe), et si on ne connait pas l'astuce, on commence par décomposer sur $\mathbb{C}$. On sait que $X^4 + 1$ possède quatre racines : les racines 4ème de -1. Vous n'avez pas oublé la méthode ? On met le second membre sous forme exponentielle :
$$z^4 = -1 \iff z^4 = e^{i\pi},$$
on déduire une solution particulière : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, puis l'ensemble des racines :
$$\mathcal{S} = \{z_0 e^{\frac{2ik\pi}{4}}\} = \{e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}, e^{\frac{9i\pi}{4}}\}.$$
Ainsi, on a
$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - e^{\frac{9i\pi}{4}}).$$
On peut mettre ces racines sous forme algébriques, mais ce n'est pas nécessaire. Comment récupérer la factorisation sur $\mathbb{R}$? On groupe les facteur en gardant en tête qu'ils vont par paires conjuguées :
$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - \overline{e^{\frac{7i\pi}{4}}}).$$
Dans le cours, on a vu comment développer de tels facteurs :
$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + |z|^2,$$
ce qui donne ici :
$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$
<u>**Remarque :**</u> On peut raccourcir tout cela grâce à l'astuce très spéciale :
$$X^4+1 = X^4+2X^2+1-2X^2 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2+1+\sqrt{2}X)(X^2+1-\sqrt{2}X).$$
3. Notons P le polynôme à factoriser. Tel quel, c'est dur, il faut reconnaître une quantité déjà vue. Une somme géométrique ? En effet, on a
$$(X - 1)P = X^8 - 1,$$
ainsi, ils suffit de factoriser $X^8 - 1$ (ou de trouver ses racines). On peut manipuler les racines 8-ième de l'unité (on obtient $\{e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in [\![0\,,7]\!]\}$), mais il est plus rapide d'écrire
$$X^8 - 1 = (X^4 - 1)(X^4 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1).$$
On déduit les factorisations sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ avec les exercices précédents (détails laissé à l'élève), en simplifiant par le facteur $X - 1$:
   - Sur $\mathbb{C}$:
$$P = (X + 1)(X + i)(X - i)(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - e^{\frac{9i\pi}{4}}).$$
   - Sur $\mathbb{R}$:
$$P = (X + 1)(X^2 + 1)(X + 1)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X).$$
4. Exercice calculatoire mais sans piège. On a après calculs : $P(2) = 0$. Cela vaut le coup de savoir si 2 est racine double voire plus. On a
$$P' = 5X^4 - 32X^3 + 27X^2 + 116X \quad \text{et après calculs :} \quad P'(2) = 0,$$
$$P'' = 20X^3 - 96X^2 + 54X + 116 \quad \text{et après calculs :} \quad P''(2) = 0.$$
Ainsi, on sait que c'est gagné : on va factoriser par $(X - 2)^3 = X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ et il restera un polynôme de degré 2, que l'on sait étudier. En effet, après division euclidienne, on trouve
$$P = (X - 2)^3(X^2 - 2X - 15),$$
puis après une étude de racine (ou en trouvant des racines entières) :
$$P = (X - 2)^3(X + 3)(X - 5).$$

Exercice 13 ●○○ Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, et
$$P(X) = nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n.$$

1. Montrer que 1 est racine de P et préciser l'ordre de cette racine.
2. Donner un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que P est divisible par $(X-1)^m$ mais pas par $(X-1)^{m+1}$.

Exercice 14 ●●○ Encore un critère de divisibilité

Soient a, b et c trois réels, et

$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 15$$

1. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P.
2. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P, et que P n'admette pas de racine réelle.

Exercice 15 ●●● Polynômes et racines de l'unité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = (1 + X)^n - (1 - X)^n$.

1. Calculer P_n pour $n \in [\![1\,,4]\!]$.
2. Déterminer le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré).
3. P_n est-il divisible par X ?
4. **a.** Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1.$$

   b. résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ (discuter selon la parité de n).

   c. Décomposer P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 ●●○ Polynome annulateur et puissances d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Déterminer, pour $n \geqslant 3$, le reste de la division euclidienne de X^n par P. On écrira le résultat sous la forme $a_nX + b_n$, avec a_n et b_n à expliciter.
3. Calculer A^n en utilisant la division euclidienne.

Correction :

1. On calcule A^2 puis on cherche b et c tel que $A^2 = bA + cI_2$. On résout un système, et ontrouve : $b = 7$ et $c = -10$. Ainsin le polynôme $P = X^2 - 7X + 10$ vérifie bien $P(A) = 0$.

   Pour aller plus loin : Le polynôme P est appelé « polynôme annulateur de A ». On verra l'année prochaine qu'on peut toujours prendre $b = a_{11} + a_{22}$, la trace, et $c = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, le déterminant. Cette formule magique sera théorisée et étudiée en dimension n.
2. Puisque $\deg(P) = 2$, la division de X^n par P est de la forme

$$X^n = PQ + a_nX + b_n = (X^2 - 7X + 10)Q + a_nX + b_n.$$

   Comment calculer le reste sans avoir à calculer Q ? C'est classique et vu en cours : on évalue la relation sur les racines de P. Il est direct (calcul de discriminant ou bien racines entières évidentes) que ces racines sont 5 et 2. Ainsi, en évaluant :

$$\begin{cases} 5^n = 5a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{5^n - 2^n}{3} \\ b_n = \frac{5.2^n - 2.5^n}{3} \end{cases}.$$

3. On évalue la relation $X^n = PQ + a_nX + b_n$ en la matrice A, et comme $P(A) = 0$:

$$A^n = a_nA + b_nI_2,$$

   que l'on peut expliciter sous forme matricielle.

   Attention ! Lorsqu'on évalue un polynôme en une matrice $A \in M_m(\mathbb{K})$, bien penser à la convention $A^0 = I_m$ pour la constante du polynôme.

Exercice 17 ●●○ Décomposition en éléments simples

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. **a.** $F(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$. **b.** $F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
2. Même question, sur $\mathbb{C}$:

   a. $F(X) = \frac{2X}{X^2+1}$. **b.** $F(X) = \frac{1}{X^2+X+1}$.
3. $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).
4. $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$ sur $\mathbb{R}$ (à chercher sous la forme $\frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$).
5. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le dénominateur et s'inspirer de ce qui précède).

Correction :

1. **a.** Notons $F = \frac{P}{Q}$, puisque $\deg(P) = \deg(Q)$, on commence par chercher la partie entière de la fraction. Il est immédiat que

$$X^2 + 2X + 5 = (X^2 - 3X + 2) \times 1 + (5X + 3),$$

   Ainsi,

$$F = 1 + \frac{5X+3}{X^2 - 3X + 2}.$$

   On essaye de factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$. On a deux racines évidentes, 1 et 2 (ou on fait un calcul de racines) :

$$X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1),$$

donc on cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$F = 1 + \frac{5X+3}{(X-2)(X-1)} = 1 + \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = 13$ et $b = -8$. Finalement :

$$F = 1 + \frac{13}{X-2} - \frac{8}{X-1}.$$

b. $F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

2. Même question, sur $\mathbb{C}$:

a. Le numérateur a pour racines dans $\mathbb{C}$: i et $-i$. Ainsi on cherche des complexes a et b tels que

$$F(X) = \frac{2X}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = 1$ et $b = -1$. Finalement :

$$F(X) = \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}$$

b. On gagne du temps si on connait les racines complexes de X^2+X+1 (sinon on fait un calcul de racines) : il s'agit de

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi on cherche des complexes a et b tels que

$$F(X) = \frac{1}{(X-j)(X-\overline{j})} = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-\overline{j}}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = \frac{1}{j-\overline{j}}$ et $b = -a$. Or on a

$$j - \overline{j} = 2i\,\mathrm{Im}(j) = 2i\sqrt{3}$$

Finalement :

$$F(X) = \frac{2i\sqrt{3}}{X-j} - \frac{2i\sqrt{3}}{X-\overline{j}}$$

3. $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).

4. On est sensé savoir factoriser X^3+1 sur $\mathbb{R}$: puisque -1 est racine évidente, on factorise par $X+1$n et on trouve après calculs :

$$X^3 + 1 = (X+1)(X^2-X+1).$$

Ainsi, guidés par lénoncé, on cherche des réels a, b et c tels que

$$F(X) = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = \frac{1}{3}$.
Pour b et c, il existe plusieurs techniques. Ma préférée : On raisonne lorsque $X \to +\infty$. D'abord, on multiplie par X :

$$\frac{X}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{aX}{X+1} + \frac{bX^2+cX}{X^2-X+1},$$

et on prend la limite lorsque $X \to +\infty$, on trouve $0 = a + b$ et donc $b = -\frac{1}{3}$.
Pour la dernière valeur, on peut évaluer en une valeur commode qui n'est pas un pôle. En 0, on obtient $1 = a + c$ et donc $c = 1 - a = \frac{2}{3}$.
Finalement :

$$F = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}}{X^2-X+1}$$

Remarque : On peut aussi multiplier par X^2-X+1 et évaluer en une racine de ce polynôme. Mais il faut manipuler des complexes ! Cette méthode est à réserver quand les racines complexes sont simplissimes, par exemple $\pm i$, pour le polynôme X^2+1. On peut aussi évaluer en 0, puis en 1. Un peu mois élégant...

5. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le dénominateur et s'inspirer de ce qui précède).