Feuille d'exercices 17
Espaces vectoriels : dimension finie

Exercice 1 ●○○ — Compléter ou extraire

1. La famille de $\mathbb{R}^4$ formée de $e_1 = (1,0,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1,0)$ est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. La famille de polynômes $(X, 1-X, X^2+X^3)$ est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. La famille de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la question **1**, ainsi que des vecteurs $e_4 = (2,1,2,2)$, $e_5 = (0,0,1,1)$ et $e_6 = (2,0,0,1)$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^4$? Si oui, en extraire une base.
4. La famille de $M_2(\mathbb{R})$ formée des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle génératrice dans $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, en extraire une base.

Correction :
Méthode :
Détails :

1. Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. On a alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Après une résolution rapide, on trouve $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
On sait que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, donc il manque un vecteur à la famille pour faire une base. L'algorithme de la base incomplète nous suggère de piocher dans la base canonique.
Soit $f_1 = (1,0,0,0)$, alors on montre comme ci-dessus que (e_1, e_2, e_3, f_1) est libre, et puisqu'elle est composée de quatre éléments, elle aussi génératrice de $\mathbb{R}^4$, et c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.
2. On montre de manière standard que la famille $(X, 1-X, X^2+X^3)$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}_3) = 4$, il ne manque qu'un seul vecteur pour avoir une base. Comme 1 et X sont déjà dans $\mathrm{Vect}(X, 1-X, X^2+X^3)$, on ne les prend pas, mais on prend X^2 pour compléter. On montre que la famille $(X, 1-X, X^2+X^3, X^2)$ est libre, et on conclut comme ci-dessus : c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. La famille de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la question **1**, ainsi que des vecteurs $e_4 = (2,1,2,2)$, $e_5 = (0,0,1,1)$ et $e_6 = (2,0,0,1)$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^4$? Si oui, en extraire une base.
4. La famille de $M_2(\mathbb{R})$ formée des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle génératrice dans $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, en extraire une base.

Exercice 2 ●○○ — Dimension et base

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants (on pourra vérifier que c'est un sous-espace vectoriel en cas de doute) :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.
2. $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_5 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 + 2x_5 = 0\}$.
3. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par $\{(\alpha + 2\beta, -\beta + \gamma, -\gamma + 3\alpha, \beta) \mid (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\}$.
4. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^3) = X^2 P(X^2)\}$.
5. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
6. L'ensemble des suites arithmétiques (réelles ou complexes). A-t-on un résultat similaire pour les suites géométriques ?

Correction :
Méthode :
Détails :

1. Notons F l'ensemble donné. Avec les méthodes standard, on a

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,1);(0,1,0)).$$

La famille $(1,0,1);(0,1,0)$ est bien libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, et génératrice de F, c'est donc une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 2$.

2. On résout par pivot pour trouver une base et déduire la dimension.
3. Il est clair que
$$F = \mathrm{Vect}((1,0,0,3);(2,-1,0,1);(0,0,-1,1)).$$
Après une preuve rapide, la famille $((1,0,0,3);(2,-1,0,1);(0,0,-1,1))$ est libre, c'est donc une base de F, et $\dim(F) = 3$.
4. Sans restrictions sur le degré, cela semble dur. Déjà, le polynôme nul est dans F. Il ne faut pas se lancer mais constater que le degré de $P \in F$ est contraint : notons $n = \deg(P)$, alors on a
$$P(X^3) = X^2P(X^2) \implies 3n = 2+n \iff n = 2.$$
Ainsi, les éléments non nuls de F sont nécessairement de degré 2. Cherchons P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$, alors on a
$$P(X^3) = X^2P(X^2) \iff aX^6 + bX^3 + c = aX^6 + bX^4 + cX^2 \iff b = c = 0$$
Ainsi, $F = \{aX^2, \ \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2)$.
Une famille d'un élément non nul étant libre, on a (X^2) qui est une base de F, d'où $\dim(F) = 1$.
5. Voir DS, on trouve $\dim(F) = 2$.
6. Facile et extrême. Toute suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie
$$\exists (u_0, q) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + qn.$$
Posons $v = (1,\dots)$ la suite constante égale à 1, et $w = (0,1,2n\dots)$ a suite des entiers, alors l'ensemble des suites arithmétiques est
$$F = \{u_0v + qw, \ \text{ avec } (u_0,q) \in \mathbb{R}^2)\} = \mathrm{Vect}(v,w).$$
La famille (v,w) est libre car ces deux suites de non pas colinéaires, donc c'est une base de F.
Finalement, l'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel des suites de dimension 2 : c'est un plan !
On ne peut faire ce raisonnement avec les suites géométriques car il ne s'agit pas d'un sous-espace vectoriel.

Exercice 3 ●○○ — Dimension et base, bis

1. Déterminer une base et la dimension du sous-espace F de $\mathbb{R}^5$ suivant :
$$F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7),$$
avec :
$$e_1 = (1,1,2,1,1), \quad e_2 = (1,-1,1,3,-1), \quad e_3 = (2,3,3,7,6), \quad e_4 = (1,2,2,1,4),$$
$$e_5 = (0,1,0,1,2), \quad e_6 = (1,3,2,4,4), \quad e_7 = (1,1,1,-1,3).$$
2. Comment traiter la question **4** de l'exercice **1** avec un procédé visuellement plus efficace, similaire à la question précédente.

Exercice 4 ●○○ — Famille des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ et en rappeler une base.
2. Justifier qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(I_n, M, \dots, M^p)$ est liée.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(M) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Correction :

1. Question de cours : on a $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$, et une base est donnée par la base canonique formée des matrices élémentaires (E_{ij}) avec $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$
2. La famille $(I_n, M, \dots, M^p)$ est composée de $p+1$ éléments. Or toute famille qui possède plus d'éléments que la dimension est liée. Ainsi, si $p+1 \geqslant n^2+1$, c'est-à-dire si $p \geqslant n^2$, la famille est liée. La question est de trouver un polynôme annulateur de M. Daprès la question précédente, la famille $(I_n, M, \dots, M^{n^2})$ est liée, il existe donc des constantes $(\lambda_i)_{i=0,\dots,n^2}$ telles que
$$\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i M^i = 0.$$
On introduit le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i X^i$. Par construction, on a
$$P(M) = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i M^i = 0.$$

Pour aller plus loin : On a montré que tout polynôme de degré $d \geqslant n^2$ annule une matrice de taille $n \times n$. Mais il n'est pas conseillé de considérer des polynômes de degré 9 pour annuler une matrice de taille 3×3. Un théorème puissant de deuxième année donnera un polynôme annulateur naturel de degré n : le polynôme $X \mapsto \det(M - XI_n)$, une fois le déterminant bien défini.

Exercice 5 ●●○ — Trouver un supplémentaire

Trouver un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants (par « trouver » on entend : décrire, par des équations, ou par une base, et si possible donner la dimension) :

1. Tous les sous-espaces vectoriels des questions 2.1–2.5.
2. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $p < n$. Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, le sous-espace vectoriel
$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall k \in [\![0\,,p]\!]\,, P^{(k)}(1) = 0\}$$

3. Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$$

4. Dans $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}.$$

Correction :

1. Voir cours
2. Voir cours
3. On écrit :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}) \end{aligned}$$

Il est direct que la famille $(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$ est libre, ainsi c'est une base de F, et $\dim(F) = 3$. Ainsi, un supplémentaire G doit vérifier $\dim(G) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(F) = 4 - 3 = 1$. Il suffit donc de prendre pour base de G une matrice qui ne soit pas dans F, par exemple :

$$G = \mathrm{Vect}(E_{11}).$$

Alors, on a bien $F \cap G = \{0\}$ (le vérifier), donc $E = F \bigoplus G$.

4. Idée standard pour ce genre de sous-espace vectoriel : on retranche ce qu'il faut pour être dans F. Pour $f \in E$, posons $g = f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors on a bien

$$f = f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le second terme $I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est une constante, ainsi, on pose $H = \mathrm{Vect}(1)$, l'ensemble des fonctions constantes. On a

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - I)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - I \times 1 = I - I = 0,$$

donc $g \in F$.

Cela prouve que $E = F + \mathrm{Vect}(1)$. Notez que l'idée est naturelle : en soustrayant une constante (la valeur moyenne de f), on obtient une fonction d'intégrale nulle. Il reste à montrer que la somme est directe. Soit $f \in F \cap \mathrm{Vect}(1)$. On a :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1] : \ f(t) = \lambda \\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \implies \int_0^1 \lambda \ \mathrm{d}t = 0 \iff \lambda = 0 \iff f = 0.$$

Cela prouve que $F \cap \mathrm{Vect}(1) = \{0\}$, et donc que la somme est directe.

Exercice 6 ●●○ — Trouver un supplémentaire Soit $E = M_3(\mathbb{R})$, et F le sous-ensemble de E suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & a+b-c \\ 0 & 2a-b+c & 0 \\ a+b-c & 0 & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner une base et la dimension de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.
4. Reprendre l'exercice avec

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & a-c \\ 0 & 2a-b-c & 0 \\ a-c & 0 & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Correction :

1. On voit que F peut sécrire :

$$F = \{aA_1 + bA_2 + cA_3, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3),$$

où on a introduit les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La famille (M_1, M_2, M_3) est génératrice de F, mais est-ce une base ? Ne concluons pas trop vite. On peut montre la liberté à la main : soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0 \iff \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b - c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0 \text{ après résolution.}$$

Ainsi, la famille (M_1, M_2, M_3) est libre. Ainsi, une base de F est (M_1, M_2, M_3), donc $\dim(F) = 3$.

3. Un tel supplémentaire H vérifie : $\dim(F) + \dim(H) = \dim(M_3(\mathbb{R})) = 9$, et donc $\dim(H) = 6$. On cherche donc une famille libre de 6 matrices en anticipant pour qu'un aucune de leurs combinaisons ne soient dans F. On s'aide de la base canonique formée des matrices élémentaires (E_{ij}). Déjà, on prend les quatres matrices élémentaires $(E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{32})$. De plus, les matrices E_{11} et E_{33} ne sont pas combinaisons linéaires de (M_1, M_2, M_3). Finalement, on pose

$$H = \mathrm{Vect}(E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{32}, E_{11}, E_{33}).$$

Puisque la famille $(E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{32}, E_{11}, E_{33})$ est libre, on a $\dim(H) = 6$. Par ailleurs, soit $M \in F \cap H$, après des calculs rapide, on a $M = 0$, ce qui prouve que $F \cap G = \{0\}$, et donc la somme est directe. Finalement, on a bien $M_2(\mathbb{R}) = F \bigoplus H$.

4. On voit que G peut sécrire :

$$G = \{aM_1 + bM_2 + cM_3, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3),$$

où on a introduit les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (M_1, M_2, M_3) est génératrice de G, mais est-ce une base ? Ne concluons pas trop vite. On peut essayer de montrer la liberté à la main, et échouer. On voit (ou on trouve en resolvant un système) que : $M_1 + M_2 + M_3 = 0$, ce qui prouve que la famille est liée. Puisque $M_3 = -M_1 - M_2$, on a :

$$G = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2),$$

donc la famille (M_1, M_2) est libre.

Cette fois, les matrices deux matrices M_1 et M_2 étant non colinéaires, elles forment une famille libre. Ainsi, une base de G est (M_1, M_2), donc $\dim(G) = 2$.

Exercice 7 ••○ — Un sous-espace de fonctions On note

$$F = \{x \mapsto a\sin(x + \varphi) \mid (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, et en déduire sa dimension.

<u>**Correction**</u> :

<u>**Méthode**</u> :

Essayer de "développer" la fonction $x \mapsto a\sin(x + \varphi)$. Attention, il faut aussi justifier que toute fonction de $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est de cette forme !

<u>**Détails**</u> :

Procédons par double inclusion.

- Soit $f \in F$. Alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos).$$

Cela prouve $F \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.

- Réciproquement soit $f \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, c'est-à-dire que

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x.$$

On sait que cette fonction peut être transformer sous la forme

$$f(x) = r\cos(x - \phi) \quad \text{avec} \begin{cases} r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \phi \text{ vérifiant } \cos\phi = \frac{\beta}{r} \text{ et } \sin\phi = \frac{\alpha}{r} \end{cases}.$$

On déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = r\cos(x - \phi) = r\sin(x - \phi - \frac{\pi}{2})$$

ce qui prouve que $f \in F$.

Il reste à donner la dimension de F. Montrons que $(\sin, \cos)$ est une famille libre (attention : ce sont des fonctions). Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha\sin x + \beta\cos x = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on trouve $\beta = 0$, puis en évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha = 0$. Cela prouve que la famille est libre, et donc que $\dim(F) = 2$.

<u>Remarque</u> : Si on a oublié la transformtion $\alpha\sin x + \beta\cos x = r\cos(x - \phi)$, ne pas hésiter à la retrouver manuellement en développant, c'est finalement le coeur de l'argument. Si on a oublié les formules, qu'on ne les retrouve pas, mais qu'on sait qu'elles existent, cela fonctionne aussi.

Exercice 8 ••○ — Une autre vision des suites récurrentes linéaires Soit a et b dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. On notes E l'ensemble des suites à valeurs complexes qui vérifient

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Trouver une suite (v_n) simple dans E.

2. On note F l'ensemble des suites de la forme $(u_n - v_n)$, où (u_n) est dans E. Montrer que F est une droite vectorielle que l'on précisera.

3. En déduire un description des suites dans E.

4. Adapter la méthode pour décrire les suites qui vérifient

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8.$$

Correction :

1. On se souvient du cours sur ces suites arithmético-géométriques : une suite qui vérifie la relation est par exemple la suite correspondant au point fixe ℓ de $x \mapsto ax+b$. Cette valeur se trouve en résolvant $\ell = a\ell + b$, et donc on a la suite constante
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ell = \frac{b}{1-a}.$$
2. C'est encore le cours sur les suites arithmético-géomtriques. Posons $w_n = u_n - v_n$, alors la suite (w_n) vérifie
$$w_{n+1} = aw_n,$$
Et donc $w_n = w_0 a^n$. L'ensemble F des suites géométriques de raison $a \in \mathbb{R}$ fixée est un sous-espace vectoriel de dimension 1, et on vient de montrer : $(u_n) \in E \iff (u_n - v_n) \in F$.
3. Ce qui précède prouve que
$$E = \{(v_n) + (w_n), (w_n) \in F\}.$$
Pour aller plus loin : Nous n'avons rien fait de nouveau par rapport au cours sur les suites arithmético-géométriques, mais nous avons présenté l'étude en terme d'espace vectoriels. En fait, l'idée est commune à beaucoup de nos chapitres : théorème de superposition pour les équations différentielles, étude des solutions d'un système linéaire avec second membre, ... : on montre qu'en soustrayant une solution particulière, on obtient des éléments d'un espace vectoriel, solutions d'une équation linéaire (ou : homogène). La théorie sous-jacente est celle des *espaces affines* : ce sont des espaces obtenus par une translation des espace vectoriels.
4.